Examen General de Geometría Algebraica 2021-2.

(Fecha)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resuelva **sólo** 4 de 6 ejercicios. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0. El espacio afín será denotado por $\mathbb{A}$ y el proyectivo por $\mathbb{P}$.

1. Considerar el ideal $\mathcal{I}$ en el anillo $K[x, y, z]$ generado por $\{x^2 - yz, xz - y\}$, y denotar como $\mathbb{W}$ al conjunto de ceros de $\mathcal{I}$ en $\mathbb{A}^3$. Calcular:
   (a) La dimensión de $\mathbb{W}$
   (b) La descomposición de $\mathbb{W}$ en componentes irreducibles
   (c) El espacio tangente de Zariski de $\mathbb{W}$ y de cada una de sus componentes irreducibles en el origen de $\mathbb{A}^3$

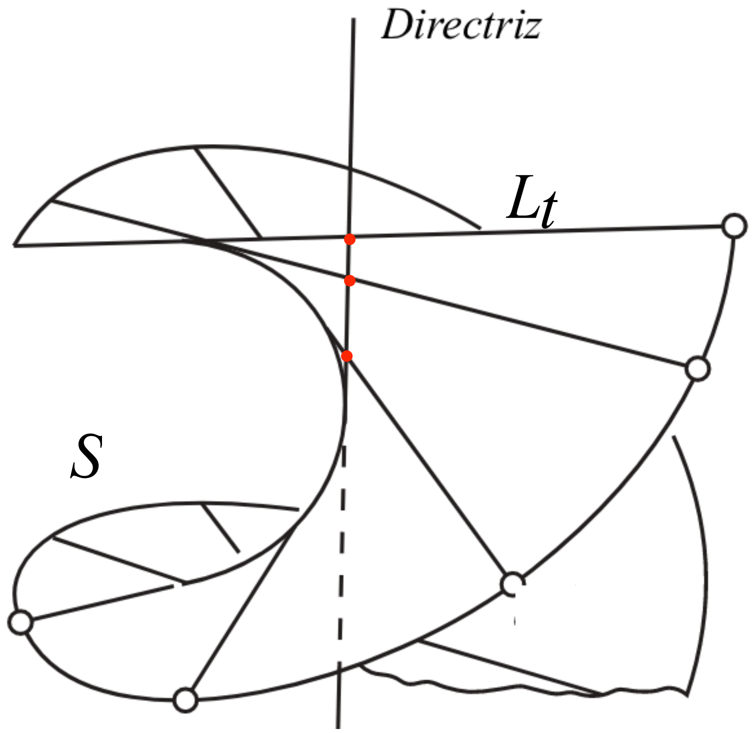
2. Denotar como $\mathbb{W}$ a la imagen de la aplicación $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ definida como
$$t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$
¿Son $\mathbb{A}^1$ y $\mathbb{W}$ isomorfos? ¿Son racionalmente equivalentes? Calcular las transformadas total y estricta de $\mathbb{W}$ en la explosión del origen de coordenadas $\mathrm{Bl}_0\mathbb{A}^2$.

3. Sea f un polinomio en n variables. Demuestrar que $\mathbb{A}^n \setminus V(f)$ es una variedad afín.

4. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   (a) Un morfismo finito entre variedades afines es suprayectivo.
   (b) Si existe una aplicación birracional entre dos variedades afines irreducibles
$$f : V \dashrightarrow W,$$
entonces las dimensiones de V y W son iguales.[1]

5. Considerar la aplicación racional $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$ definida como
$$[x : y, z] \mapsto [xy : xz : y^2 : yz : z^2].$$
Exhibir que la imagen $S :=\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{P}^4$ contiene una familia de rectas L_t parametrizadas por $t \in \mathbb{P}^1$. Escribir las ecuaciones que satisface la directriz de S en $\mathbb{P}^4$.

[1] Recordar: la dimensión de una variedad X se define como el grado de transcendencia de su campo de fracciones $\mathbb{F}(X)$ sobre $\mathbb{F}$.



6. (a) Mostrar que una cuádrica suave en $\mathbb{P}^3$ es doblemente reglada.

   (b) Escribir las 27 líneas contenidas en la superficie cúbica de Clebsh:

$$S = \{x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

   Si consideramos una línea $L \subset S$ ¿a cuántas de las otras 26 líneas de S es L incidente?

¡SUERTE!