Examen General de Geometría Algebraica 2022-1.

(13 de enero del 2022)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resolver **sólo 4** ejercicios de los 6 escritos abajo. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Sea X el conjunto algebraico afín definido por

$$X := V\left((y-x^2)(y^2-z^3), (y-x^2)x\right) \subset \mathbb{A}^3.$$

   (a) Descomponer X en componentes irreducibles.

   (b) Decir si alguna de las componentes es isomorfa a la recta afín o al plano afín.

   (c) Decir si alguna de las componentes es birracionalmente equivalente a la recta afín o al plano afín.

2. Considerar las siguientes curvas:

   (i) $X_1 := V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$

   (ii) $X_2 := V(y - x^3) \subset \mathbb{A}^2$

   (iii) $X_3 := V(zy^2 - x^3) \subset \mathbb{P}^2$

   (iv) $X_4 := V(xy) \subset \mathbb{A}^2$

   ¿Cuáles son isomorfas?¿Cuáles son birracionalmente equivalentes? Justificar las respuestas.

3. Sea X un cerrado de Zariski del espacio afín de dimensión n y sea I el ideal de polinomios en n variables que se anulan en X. Demostrar que, si X tiene una componente irreducible de dimensión d, entonces, cualquier conjunto de generadores de I tiene al menos $n-d$ elementos.

4. (a) Mostrar que una cuádrica suave en $\mathbb{P}^3$ es doblemente reglada.

   (b) Escribir las 27 líneas contenidas en la superficie cúbica de Clebsh:

$$S = \{x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x+y+z+w)^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

   Si se considera una línea $L \subset S$ ¿a cuántas de las otras 26 líneas de S es L incidente? Justificar la respuesta.

5. (a) Considerar $\mathbb{P}^9$ como el espacio que parametriza a las cuádricas en $\mathbb{P}^3$. Mostrar que existe una hipersuperficie $\Delta \subset \mathbb{P}^9$ de grado 4 que parametriza a las cuádricas singulares.

   (b) Considerar una cúbica alabeada $C \subset \mathbb{P}^3$ (por ejemplo, $C = \{[x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3] \mid [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1\}$) y su ideal $I_C = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Si denotamos

$$W := \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2 \mid aQ_1 + bQ_2 + cQ_3\} \subset \mathbb{P}^9,$$

   entonces escribir la ecuación de la curva $D \subset W$ cuyos puntos parametrizan las cuádricas singulares que contienen a C. Es decir, escribir la ecuación de $D = \Delta \cap W$. ¿Es D singular?

6. (a) Considerar 5 puntos distintos $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Mostrar que una de las siguientes tres opciones es posible:

   (i) existe una familia de cónicas de dimensión 2 que contiene a Γ.

   (ii) existe una familia de cónicas de dimensión 1 que contiene a Γ.

   (iii) existe una única cónica que contiene a Γ.

   En los casos (1) y (2), ¿cuál es la geometría de los puntos? Justificar la respuesta.

   (b) Considerar 4 puntos distintos $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que 3 de ellos no sean colineales. Si L denota una recta que no contiene a los puntos anteriores, entonces mostrar que existe un número finito de cónicas que pasan por p_1, p_2, p_3, p_4 y que son tangentes a L. ¿Qué número es éste? Justificar la respuesta.

¡SUERTE!