Examen General de Geometría Algebraica 2023-2.

(1 de Agosto del 2023)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resuelva 4 de 6 ejercicios. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

Todas las variedades están definidas sobre un campo k algebraicamente cerrado. Usaremos $\mathbb{A}^n$ para denotar al espacio afín de dimensión n y $\mathbb{P}^n$ para el espacio proyectivo de dimensión n; ambos sobre el campo k. El símbolo $Z(f)$, con $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, denota el conjunto de ceros de f en $\mathbb{A}^n$.

1. Dado el conjunto $V = \{(t^2, t^3, t^5) \mid t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$:
   (a) Demuestre que V es una variedad afín de dimensión 1.
   (b) Encuentre generadores del ideal
   $$I(V) = \{f \in k[x, y, z] \mid f(P) = 0 \text{ para todo } P \in V\}.$$
   (c) Demuestre que $k[V]$ no es isomorfo a un anillo de polinomios pero V sí es birracionalmente equivalente a la recta afín.

2. Si $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, demuestre que $\mathbb{A}^n \backslash Z(f)$ es afín. Si en lugar de un polinomio f, se consideran dos, no múltiplos, f, g ¿es cierto que $\mathbb{A}^n \backslash Z(f, g)$ es afín? Demuestre o exhiba un contraejemplo.

3. Considere $Y = Z(x^2 + 2xy + y^2 - x^5) \subset \mathbb{A}^2$.
   (a) Demuestre que Y es singular en el origen ¿es singular en otro punto?
   (b) Explote $\mathbb{A}^2$ en el origen y calcule la intersección de la transformada estricta de Y con el divisor excepcional.
   (c) ¿Es dicha transformada estricta de Y no singular?

4. Si $\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es la aplicación racional definida como $\psi([x : y : z]) = [xy : xz : yz]$, entonces:
   (a) encuentre el dominio de definición de ψ,
   (b) demuestre que ψ es birracional y que es su propia inversa,
   (c) encuentre un abierto $U \subset \mathbb{P}^2$ tal que la restricción de $\psi_{|U} : U \to \psi(U)$ sea un isomorfismo.

5. Considere una subvariedad (irreducible) $Y \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión $d \geq 0$ y $X \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie. Demuestre que la intersección $Y \cap X$ es vacía o cada componente irreducible de ella tiene dimensión $d - 1$.

6. Considere una variedad algebraica X (irreducible) y un punto $p \in X$. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre ideales primos del anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$ y subvariedades cerradas de X que contienen a p.

¡SUERTE!