Examen General de Geometría Diferencial 2022-1.

(13 de Enero del 2022)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

1. Considere el grupo G de difeomorfismos $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}^2$ generado por la transformación $T(x,y) = (x+1, -y)$. Defina el espacio cociente $E = \mathbb{R}^2/G$ y muestre que éste tiene estructura de haz vectorial no trivial sobre $\mathbb{S}^1$.

2. Sean (M, g_M) y (N, g_N) variedades riemannianas y sea $f : M \to \mathbb{R}$ suave y positiva. El producto alabeado $M \times_{f^2} N$ se define como el producto cartesiano $M \times N$ equipado con la métrica riemanniana $g = g_M + f^2 g_N$. Sean $\pi : M \times_{f^2} N \to M$ y $\sigma : M \times_{f^2} N \to N$ las proyecciones en la primera y segunda componente, respectivamente.
   (a) Muestre que para cada $q \in N$, $\pi|_{M\times\{q\}}$ es una isometría sobre M.
   (b) Muestre que para todo $p \in M$, $\sigma|_{\{p\}\times N}$ es una homotecia sobre N con dilatación $1/f(p)$, es decir, para cada $q \in N$ y para cada $X, Y \in T_{(p,q)}(\{p\} \times N)$, se cumple que $g_N(d\sigma X, d\sigma Y) = 1/f(p)\, g(X,Y)$.

3. Diga si cada uno de los operadores siguientes es un campo tensorial o no. Justifique su respuesta.
   (a) La función que a cada terna (θ, X, Y) que consiste de una 1-forma θ y dos campos vectoriales X, Y, le asocia la función $\theta[X,Y]$.
   (b) Si θ es una 1-forma fija, la función que a cada pareja de campos vectoriales X e Y le asocia la función
   $$d\theta(X,Y) = X\theta Y - Y\theta X - \theta[X,Y].$$

4. Muestre que si $x^1, \ldots, x^n$ es un sistema ortogonal de coordenadas locales, entonces las ecuaciones diferenciales de las geodésicas se pueden expresar en la forma
   $$\frac{d}{ds}\left(g_{kk}\frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2.$$

5. Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión 3.
   (a) ¿Cuántas componentes independientes R^i_{jkl} tiene el tensor de curvatura Riemanniana?
   (b) Si $K(\Pi_{ij})$ denota la curvatura seccional de los planos tangentes coordenados Π_{ij} generados por los campos coordenados $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ¿Se pueden expresar las curvaturas seccionales en términos de R^i_{jkl}? ¿Y al revés? Justifique sus respuestas

¡SUERTE!