Examen General de Geometría Diferencial 2023-2.

(1 de Agosto del 2023)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resuelve 5 de 6 ejercicios. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

1. Sea H el semiplano en $\mathbb{R}^2$ dado por $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, y supón que $C \subset H$ es una subvariedad encajada unidimensional de H. La *superficie de revolución* determinada por C es el conjunto $S_C \subset \mathbb{R}^3$ dado por:

$$S_C := \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in C)\}.$$

   Al conjunto C se le llama *curva generadora* de S_C. Demuestra que S_C es una subvariedad encajada bidimensional en $\mathbb{R}^3$.

2. Considera el espacio proyectivo real de dimensión 3, $\mathbb{P}^3\,\mathbb{R}$. Recuerda que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, entonces el conjunto

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] := \{(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) \; : \; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

   denota un punto en $\mathbb{P}^3\,\mathbb{R}$. Considera la cuádrica proyectiva dada por

$$Q = \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^3\,\mathbb{R} \mid \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0\}$$

   en donde cada ε_i es 1 o -1.

   (a) Define las cartas de $\mathbb{P}^3\,\mathbb{R}$.

   (b) Muestra que Q es una subvariedad de $\mathbb{P}^3\,\mathbb{R}$.

   (c) Supón que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, 1, -1, -1)$. Muestra que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ el punto

$$P(u, v) = [\cos(\pi u) : \sin(\pi u) : \cos(\pi(u + 2v)) : \sin(\pi(u + 2v))]$$

   pertenece a Q y sólo depende de la clase de equivalencia u y v módulo $\mathbb{Z}$.

   (d) Muestra que la aplicación

$$(u, v) \mapsto P(u, v)$$

   se factoriza en un encaje del toro $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ en $\mathbb{P}^3\,\mathbb{R}$ de imagen Q.

3. Supón que M es una variedad suave y sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial. Si $\gamma : J \to M$ es una curva integral maximal de V cuyo dominio J tiene cota superior mínima finita b, demuestra que para cualquier $t_0 \in J$, $\gamma([t_0, b))$ no está contenido en ningún subconjunto compacto de M.

4. Sea $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y considera la 2-forma

$$\omega = \frac{x\; dy \wedge dz + y\; dz \wedge dx + z\; dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

   (a) Calcula $d\omega$.

(b) Determina si ω es cerrada.

(c) ¿Es ω exacta?

5. Considera $\mathbb{R}^3$ equipado con la siguiente métrica:

$$g = (1 + x^2)dx^2 + dy^2 + e^z dz^2$$

(a) Calcula los símbolos de Christoffel y la conexión de Levi-Civita de g.

(b) Escribe y resuelve la ecuación geodésica asociada.

(c) Considera la curva $\gamma(t)$ parametrizada por $t \to (t, t, t)$. Calcula el transporte paralelo de un vector $(a, b, c)_{(0,0,0)}$ a lo largo de γ

(d) Determina si la curva γ descrita en el inciso anterior, es una geodésica.

(e) Exhibe dos campos vectoriales paralelos y no triviales a lo largo de γ, $X(t)$ y $Y(t)$, que cumplan que $g(X(t), Y(t))$ sea constante. ¿Habrá campos vectoriales paralelos no triviales a lo largo de γ que no cumplan esta condición? ¿Por qué?

6. Considera la esfera unitaria $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ y considera el toro de Clifford inmerso en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathcal{T} := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{1}{2}\}$$

(a) Dado $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathcal{T}$, considera los campos vectoriales

$$E_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{2}(-y_1, x_1, 0, 0), \qquad E_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{2}(0, 0, -y_2, x_2).$$

que inducen un marco ortonormal en $\mathcal{T}$. Calcula el campo normal unitario $\overline{N}$ a $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{R}^4$ y el campo normal unitario N a $\mathcal{T}$ en $\mathbb{S}^3$.

(b) Usando el operador de Weingarten definido como $W(X) = \nabla_X^{\mathbb{S}^3} N$, donde $\nabla^{\mathbb{S}^3}$ es la conexión de Levi-Civita en $\mathbb{S}^3$, demuestra que la curvatura media de $\mathcal{T}$ en $\mathbb{S}^3$ es cero, es decir, demuestra que la traza del operador de Weingarten es cero.

¡SUERTE!