PROGRAMA PARA LA PREPARACION DEL EXAMEN GENERAL DE MAESTRIA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción. El presente programa tiene por objeto proponer una guía para la preparación del examen general de ecuaciones diferenciales del posgrado de matemáticas de la UNAM. Se espera que al iniciar dicho programa el alumno este familiarizado con: los elementos de Cálculo Diferencial e Integral en varias variables, ecuaciones diferenciales ordinarias I de nivel licenciatura así como también un dominio de los temas de sus cursos de álgebra lineal I y II en especial lo referente a teoría de operadores lineales y sus diferentes formas canónicas matriciales, de análisis I, II: es requerido un dominio de los rudimentos de topología de R^n así como también de nociones de espacios métricos completos y métricas de espacios de funciones contínuas.

A grandes rasgos este programa cubre la siguiente temática:

- Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias y dependencia de condiciones iniciales y parametros.
- Clasificación y estabilidad de soluciones estacionarias y periódicas.
- Linealización local de sistemas no lineales en una vecindad de puntos singulares y teoría cualitativa.
- Introducción a perturbaciones y bifurcaciones
- Ec.Dif.Par. lineales de 1o y segundo orden clasificacion, ejemplos y problemas físicos que llevan al planteamiento de ecuaciones diferenciales parciales.

Los temas o secciones marcadas con asterisco se están considerando como opcionales segn los intereses y tiempo disponible del alumno y no serán requeridos para el examen. El objetivo de ponerlos dentro del programa es para complementar la teoría con alguna consideración importante relacionada con el tema.

A. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

I.- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.

1. Sistemas lineales homogéneos en el plano. Retratos fase. Clasificación de puntos singulares (foco, silla, nodo, centro). Soluciones de sistemas lineales en el plano. Ecuaciones lineales de segundo orten con coeficientes constantes. Ecuación del péndulo con fricción. Solución de sistemas lineales no homogéneos en el plano.

[Ar1] Cap. 3, par. 20, sec. 3,4,5.

[H-L-S] Cap. 11 sec. 5,6,7,8.

[Pe] Cap. 1, sec. 1.5.

[Pon] Cap. 2, sec. 16,17, pp.115-126.

2. Sistemas lineales en el espacio tridimensional real (ejemplos), retratos fase, clasificación de puntos singulares.

   [Ar1] Cap. 3, par. 21, sec. 1.

3. Sistemas lineales en R^n y teorema de existencia y unicidad de sistemas lineales con coeficientes constantes.

   3.1 Exponencial de un operador lineal (definición y propiedades) y teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones lineales en R^n con coeficientes constantes (homogéneas y no homogéneas).

   [Ar1] Cap. 3, par. 14, sec. 1-8, par. 15, sec. 1,2.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.5. [C-L] Cap 3, sec. 1.

   3.2 Cálculo de soluciones. La exponencial de un operador lineal diagonalizable con valores propios reales, con valores propios complejos; de un operador lineal nilpotente; y combinaciones de los anteriores.

   [Pon] Cap. 2, sec. 7,8, pp.41-61.

   [Pe] Cap. 1, sec. 1.6, 1.7.

   [Ar1] Cap. 3, par. 17, sec. 1-3.

   3.2 Clasificación de puntos singulares de sistemas lineales atractores, repulsores,...).

   [Ar1] Cap. 3, par. 21, sec. 1,2,3,4, par. 22, sec. 1, *2-8.

   [Pe] Cap. 1, sec. 1.6,1.7.

   3.2 Estabilidad de soluciones de sistemas lineales. Estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad de Lyapunov de soluciones de sistemas de ecuaciones. Estabilidad de soluciones de equilibrio de sistemas lineales.

   [Ar1] Cap. 3, par. 23.

   [Pe] Cap. 1, sec. 1.5.

   [B-N] Cap. 4, sec. 4.1, 4.2, Teorema 4.1 de la sec. 4.3.

   [Pon] Cap. 5, sec. 26, pp.200-204?.

II.- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes variables (Teoría general).

1. Desigualdad de Gronwall ([B-N] Cap. 1, sec. 1.7, pp.31) Teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas lineales con coeficientes variables.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.2, pp.37, 38, 39.

2. Propiedades de las soluciones de un sistema homogéneo. Ecuación matricial y matriz fundamental asociada a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Wronskiano de una matriz fundamental.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.3.

   [Ar1] Cap. 3, par. 27, sec. 1,2,3,4.

   [Pon] Cap. 4, sec. 19, pp.127-131, 134-137.

3. Formula de Liouville

   [Ar1] Cap. 3, par. 16 (caso coeficientes constantes),

   [Ar1] Cap. 3, par. 27, sec. 6 (caso coeficientes variables);

   [H] Cap. 4, par. 1, Teorema 1.2, p. 46,47;

   [B-N] Teorema 2.3 (formula de Abel), pp. 46;

   [C-L] Teorema 7.3, pp. 28.

   [Pon] Cap. 3, sec. 17, pp.131.

4. Sistemas lineales no homogéneos. Soluciones por el método de variación de constantes.

   [Ar1] Cap. 3, par 29, pp. 264,265.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.4, p. 3, sec. 3, pp.74-75;

   [H] Cap. 4, sec 2, pp.48,49.

   [Pon] Cap. 3, sec. 17, pp.133.

III.- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes periódicos (Teoría de Floquet).

1. Matriz fundamental de un sistema con coeficientes periódicos. Matriz de monodromia del sistema. Teorema de Floquet.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.9, pp.96-97;

   [C-L] Cap. 3, sec. 5, Teorema 5.1, pp. 78-79;

[Pon] Cap. 3, sec. 19, pp.144-149.

2. Reducción de un sistema lineal con coeficientes periódicos a uno con coeficientes constantes. Multiplicadores y exponentes característicos de un sistema lineal con coeficientes periódicos.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.9, pp.97-98;

   [C-L] Cap. 3, sec. 5, Teorema 5.1, pp. 78-79;

   [Pon] Cap. 3, sec. 19, pp.144-149.

3. Estabilidad de la solución de equilibrio de un sistema lineal con coeficientes periódicos.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.9, Corolario 3, pp. 99;

*4. Relación entre los multiplicadores de un sistema homogéneo con coeficientes periódicos de periodo ω y las soluciones de periodo ω del sistema. Condiciones para la existencia de soluciones de periodo ω de sistemas con coeficientes periódicos de periodo ω no homogéneos.

   [B-N] Cap. 2, sec. 2.9, pp.101, 102;

*5. Problemas de Sturm-Liouville

   [D-G] Cap. 11, sec. 11.4-11.5,pp. 510-521.

*6. Teoremas de oscilación y comparación para ecuaciones lineales de segundo orden.

   [B-R] Cap. 1,sec.11, teor. 7,8, pp. 29-31.

IV.- Sistemas no lineales. Existencia y unicidad de soluciones. Continuidad y diferenciabilidad de soluciones respecto a condiciones iniciales y parámetros.

1. Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones y dependencia continua respecto a condiciones iniciales. Soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como puntos fijos de operadores. Contracciones en espacios métricos completos y existencia y unicidad de puntos fijos de aplicaciones que contraen. Iteradas de Picard.

   [Ar1] Cap. 4, par 30, 31, secciones 1-8 pp. 266-277.

   [H] Cap. 2, sec 1, pp.8-10.

   [Pon] Cap. 4, sec. 21, pp.159-169.

2. Dependencia continua de soluciones respecto a parámetros. Ecuación de variaciones y diferenciabilidad de soluciones respecto a las condiciones iniciales y parámetros.

[Ar1] Cap. 2, par 7, secciones 5, pp. 97,98.

[Ar1] Cap. 4, par 32, secciones 1,2 pp. 279,280.

[Pon] Cap. 4, sec. 22, pp.170-181.

V.- Teoría cualitativa de sistemas no lineales.

1. Funciones de Lyapunov y estabilidad de soluciones estacionarias. Teorema de Lyapunov sobre estabilidad de soluciones estacionarias.

    [Har] Cap. 3, sec. 8, pp.37-40.

    [Hi-S] Cap. 9, sec. 1,2,3, pp.180-198.

    [Pon] Cap. 5, par. 26, pp. 200-213.

    - Teorema de Lyapunov:

        [Har] Teo. 8.1 y 8.2 p 38,39;

        [Hi-S] Teo.1, p 193.

        [Pon] Teo. 19, p.208.

2. Variedades estable, inestable y central de puntos singulares.

    - Teorema de la variedad estable.

        [C-L] Cap. 13, sec. 4, Teorema 4.1 (existencia de la variedad estable e inestable), pp. 329-333; *Teorema 4.2 (diferenciabilidad de la variedad estable),

        [Pe] Cap. 2, sec. 2.7, pp. 104-115.

    - *Teorema de la variedad central:

        [Pe] Cap. 2, sec. 2.7, pp. 115.

3. Estabilidad y clasificación topológica de puntos singulares de sistemas no lineales autónomos.

    - Teorema de Grobmann-Hartmann (linealización topológica de sistemas de ec. dif. en una vecindad de un punto singular):

        [H] Cap. IX, sec.7, Teorema 7.1, pp. 244, *Demostración: pp. 244-250.

        [Pe] Cap. 2, sec. 2.8, pp. 118-126.

        (*Grobmann,D.M., "Sobre homeomorfismos de sistemas de ecuaciones diferenciales", Dok.Ac.Nauk., T 128, No.5, 1959 (en Ruso)). "Clasificación Topológica local de puntos singulares en el espacio n-dimensional", Mat.Sb, T.56(98),No.1 (en ruso).

- Teorema de Grobmann-Hartmann (linealización topológica de transformaciones en una vecindad de un punto fijo):

    [H] Cap. IX, sec. 7, Lema 8.1, pp. 245, *demostración: pp. 245-250.

    [Ar2] Cap. 3, par. 13, sec. H, pp. 125, *demostración ver sec. C,D,G.

    *(para mas información relacionada con este tema ver Nota en [H] cap. IX, Apen. pp. 271 L-272).

4. Ecuación de primera variación de una solución periódica de un sistema no lineal y estabilidad de orbitas periódicas.

    [C-L] Cap. 13, sec. 2, pp. 321-327,

    [Pon] Cap. 5, par. 31, pp.261-276.

    Teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintotica de soluciones periódicas de sistemas no autónomos

    [C-L] Teo. 2.1, Cap. 13, sec. 2, p. 322;

    [Pon] Teo. 25, Cap. 5, par 31, pp.264).

    Teorema de Lyapunov sobre estabilidad de soluciones periódicas de sistemas autonomos

    [C-L] Teo. 2.2, Cap. 13, sec. 2, p. 323;

    [Pon] Teo. 26, Cap. 5, par 31, pp.264).

5. Puntos limite de trayectorias, ciclos limite. Teorema de Poincare-Bendixon. Clasificación de conjuntos limites en el plano.

    [Hi-S] Cap. 11, sec. 1-4,*5, pp.239-254, (ver teo. p. 248).

    [Pe] Cap. 3, sec. 3.7, pp. 226-231, (ver Teo. 1, p 227).

    [Pon] Cap 5, sec. 28, pp. 220-231, (ver Teo. 21 p. 229).

VI.- Introducción a la teoría bifurcaciones y de perturvaciones de sistemas en el plano. Metodos de promediación.

[Ar2] Cap. 4, par. 16-18, pp.142-151; Cap. 6, par. 29, 31, 32, pp.219-266.

[Hi-S] Cap. 16, sec. 1-3, pp.304-319.

[J-S] Cap.4,5,6 pp. 100-172.

1. Ejemplos:

Ecuación del péndulo	[Ha-K] Part III, Cap. 7, p. 170;
Oscilador lineal armónico	[Ha-K] Part III, Cap. 7, p. 171;
Ecuación de Duffing	[Ha-K] Part III, Cap. 14, p. 416;
La ecuación de Lotka y Volterra.	[Ha-K] Part III, Cap. 7, p. 171.
Oscilador de Van der Pol	[Ha-K] Part III, Cap. 7, p. 172;
	[Hi-S] Cap. 10, sec. 3, pp.217-227.
Ec. de Van der Pol con forzamiento	[Ha-K] Part III, Cap. 16, sec. 16.1 pp. 198-501;
Ec. de Duffing con forzamiento	[Ha-K] Part III, Cap. 16, sec. 16.1 pp. 501-503;

2. Perturbaciones de sistemas lineales, estabilidad de puntos singulares, persistencia de nodos y focos no degenerados.

   [Ha-K] Part III, Cap. 7,8, pp.170-256.

3. Métodos de perturbación. Perturbaciones regulares y singulares en la ecuación de Van der Pol. Promediación

   [O] Cap. 1, pp1-21.

   [Ar2] Cap. 4, par. 16-18, pp.142-151.

B. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

I.- Conceptos básicos y clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales.

[B-C] Cap. 1, sec. 1.2, 1.3.

[T-S], cap. I, sec. 1, 2, 3, pp.17-29.

[V], cap. I, par. 3, sec. 1.

[Pet] cap. I, pp. 1-62.

II.- Ecuaciones lineales de primer orden. Clasificación y Resolución por características.

[B-C] Cap. 2, sec. 2.1, 2.2, *2.3.

[Z], cap. V, sec. 1,2,3,4,6, pp. 112-126, 133-137.

III.- Ecuaciones lineales de segundo orden.

1. Clasificación. Superficies características. Formas canónicas de ecuaciones con dos variables.

[V], cap. I, par. 3, sec. 1, 3, 4, pp.38-51;

[T-S], cap. I, sec. 1, 2, 3, pp.17-29.

[Z], cap. V, sec. 5,7, pp. 132-133, 143-149.

2. Formulación correcta y clasificación de problemas con valores en la frontera.

   [V], cap. I, par. 4, sec. 1, 3, 4, 5, 6 pp.52-58;

3. Teorema de Cauchy-Kowalewski

   [V], cap. I, par. 4, sec. 7, pp.59-60;

   [Z], cap. IV, sec. 2, pp. 100-111.

3. Fenómenos físicos que llevan a plantear ecuaciones lineales de segundo orden:

   [V], cap. I, par. 2, pp.27-38;

   [Z], cap. VI, pp. 153-170.

   - Hiperbólicas (Ecuación de onda): [T-S], cap. II, par.1, sec. 1-6, pp. 30-47; Apen. I;II;III sec. 1,2,3; IV sec.1,2; V sec. 1.
   - Parabólicas (Ecuación del calor): [T-S], cap. III, par. 1, sec. 1, 2, 3, pp.205-213; Apend. I,II, pp.276-286.
   - Elípticas (Ecuación de Laplace): [T-S], cap. IV, par. 1, sec. 1, 2, 3, pp.309-317; Apend. II,III, pp.419-431.

BIBLIOGRAFIA DE LA PARTE A:

[Ar1] Arnold, V.I.; Ordinary Differential Equations, 3rd ed. Springer-Verlag, 1991.

[Ar2] Arnold, V.I.; Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.

[B] Birkhoff,G. and G.C. Rota: Ordinary Differential equations, 3rd edition, John Wiley and Sons, 1978. QA372,B562.

[B-D] Boyce, W., Diprima, R: Elementary Differential equations and Boundary value problems, John Wiley, New York, 1992.

[B-N] Brauer, F.; Nohel,J.A.; The Qualitative theory of ordinary Differential Equations. W.A.Benjamin, New York, 1969. QA372, B823.

[Br] Braun M.; Differential Equations and Their Applications; Applied Math. Sciences. no. 15, editorial Springer-Verlag, New York.

[C-L] Coddingyon, E.A.; Levinson, N.; Theory of Differential Equations, McGRAW-Hill, 1955. QA372, C63.

[D-G] Derrick, W., Grossman, S.; Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano, 1984.

[Ha] Hale, J.; Ordinary Differential equations, Wiley-Interscience, 1969.

[Ha-K] Hale, J. and H.Kosak; Dynamycal Systems and Bifurcations, Springer Verlag, Texts in Applied Mathematics, 1991.

[Har] Hartman, Philip; Ordinary differential equations, Birhauser, 1982.

[H-L-S] Hasser,N.B.; LaSalle,J.P.; Sullivan,J.A.; Analisis Matematico, Vol 2, Ed.Trillas, Mex 1977.

[Hi-S] Hirsh,M.,Smale, S.; Differential Equations, Dynamical Systems, and linear algebra. Academic press, New york, 1974.

[J-S] Jordan,D.W.; Smith P.; Nonlinear Ordinary Differential Equations; Oxford Applied Mathematics and computing Science series, Oxford University Press (1977).

[O] O' Malley,R.E; Singular perturbation methods for ordinary differential equations, Applied Math.Sci. No. 89, Springer-Verlag, 1991.

[PAL] Palis,J.; Welington de Melo; Geometric theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag: New-York (1982)

[Pe] Perko, L.; Differential equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.

[Pon] Pontriaguin,L.C.; Ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1962.

BIBLIOGRAFIA DE LA PARTE B:

[B-C] Bleecker, D., Csordas, G; Basic Parital Differential Equations, International Press, 1996. Clasif. QA374.B64 1996.

[E] L.C.Evans; Partial Differential Equations, Graduate Studies in Math. vol 19, AMS, 1998. (Capitulos 1,2).

[Pet] Petrovsky, I,G.; Lectures on partial differential equations, Dover (1991). Clasif. QA377/P433 1991.

[T-S] Tixonov A.N., Samarski A.A.; Ecuaciones de la fisica matematica. Ed Mir, 2a ed. 1980.

[V] Vladimirov V.C.; Equations of Mathematical Physics. Marcel Dekker, INC, New York, 1971. Clasif. QC 20/V52.

[Z] Zachmanoglou, E.C.; Thoe, D.W.; Partial Differential equations with applications. The Williams and Wilkins Company, Baltimore, 1976