

EXAMEN GENERAL
TEORIA DE GRAFICAS
Enero de 2020

El examen se calificará sobre 7.

Duración: 4 horas.

Escoge siete de las siguientes diez preguntas:

1. Prueba que una sucesión $s : d_1, d_2, \dots, d_n$ de $n \geq 2$ enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol de orden n si y solo si:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

2. Prueba que para toda gráfica cúbica G :

$$\kappa(G) = \lambda(G).$$

3. Prueba que una gráfica conexa y no trivial G es euleriana si y sólo si toda arista $e \in E(G)$ pertenece a un número impar de ciclos.

4. Sea G una gráfica bipartita con conjuntos partitos U y W tales que $|U| = |W| = k \geq 2$. Prueba que si $\deg(v) > \frac{k}{2}$ para todo $v \in G$, entonces G es hamiltoniana.

5. Prueba que si G es una gráfica Hamiltoniana, entonces para cualquier subconjunto S propio no vacío de $V(G)$ se tiene que:

$$\kappa(G - S) \leq |S|$$

6. Prueba que toda digráfica D contiene un conjunto de vértices S con la propiedad de que (1) S es un conjunto independiente (no hay flechas entre sus elementos) y (2) para cualquier vértice $v \in V(D) - S$, existe un vértice $u \in S$ tal que $d^+(u, v) \leq 2$

7. Prueba los siguientes tres resultados para gráficas planas:

- (a) Si la cara de longitud mínima de una gráfica plana G de orden n es k establece una cota superior M para el número de aristas de G en términos de k y n .
- (b) Muestra que la cota obtenida en (a) es justa determinando para $k \geq 3$ arbitraria una (n, M) gráfica plana de cuello k .
- (c) Si G es una gráfica plana exterior de orden $n \geq 2$ y m aristas entonces $m \leq 2n - 3$.

8. Demuestra el **Teorema de Hall**: Sea G una gráfica bipartita con conjuntos partitos U y W . Prueba que U puede ser emparejado con W si y solo si G satisface la **Condición de Hall**; es decir que para todo $X \subseteq U$ se tiene que $|X| \leq |N(X)|$.

9. Prueba que:

- (a) Toda gráfica plana es 5-coloreable.
- (b) ¿Por qué no puedes usar la técnica de la demostración del inciso anterior para probar que toda gráfica plana es 4-coloreable?

10. (a) Prueba que toda gráfica G con m aristas que cumple que:

$$m > \Delta(G)\beta_1(G),$$

es de clase dos.

- (b) Determina la clase de $K_{r,r}$.