Examen General de Teoría de las Gráficas
Semestre 2020-II

Duración: 4 horas. Responder 6 de los siguientes 10 ejercicios (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificarán los 6 primeros).

1. Para toda gráfica G simple. Demuestra que si $\delta(G) \geq (n-1/2)$, entonces G tiene una trayectoria hamiltoniana

2. Demuestra que una gráfica G es bipartita si y sólo si $\alpha(H) = \beta'(H)$ para toda subgráfica $H \subset G$ sin vértices aislados, donde $\beta'(H)$ es el número de cubierta por aristas

3. Sea G una gráfica bipartita con bipartición $V(G) = (X, Y)$. Demuestra que el número de apareamiento $\alpha'(G)$ cumple:

$$\alpha'(G) = |X| - \text{máx}\{|S| - |N(S)| : S \subseteq X\}$$

4. Demuestra que $\frac{cr(K_n)}{\binom{n}{4}}$ es una función monótona creciente. $cr(K_n)$ denota el mínimo número de cruces en K_n.

5. Demuestra que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) Una gráfica es planar si y sólo si no contiene una subdivision de K_5 o de $K_{3,3}$ (Teorema de Kuratowski).

   b) Una gráfica es planar si y sólo si no tiene un menor isomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ (Teorema de Wagner).

6. Sea G una gráfica en la cual cualesquiera dos ciclos impares se intersecan. Demuestra que:

   a) $\chi(G) \leq 5$,

   b) si $\chi(G) = 5$, entonces G contiene una copia de K_5.

7. Demuestra que si G es bipartita, entonces $\chi'(G) = \Delta(G)$

8. Sea G una gráfica y $x, y \in V(G)$, entonces el máximo número de (x, y)-trayectorias ajenas en aristas es igual al mínimo número de aristas en un conjunto, $A \subset E(G)$, que separa a x y y.

9. Demuestra que para todo entero positivo k y l, el número de Ramsey de una gráfica cumple que

$$r(k, l) = r(l, k).$$

10. Demuestra que el número de Ramsey de una gráfica cumple lo siguiente $r(p_1, p_2) \leq r(p_1, p_2 - 1) + r(p_1 - 1, p_2)$.