

Examen General. Teoría de las Gráficas
Semestre 2022-1

Duración: 4 horas. Resolver 5 ejercicios de los siguientes 8. (Si se entregan más de 5 ejercicios, se calificará sobre los 5 ejercicios de menor puntaje).

1.- Una digráfica se dice que es estricta si no tiene lazos ni flechas paralelas (flechas con igual cabeza y cola). Sea D una digráfica estricta donde $k = \max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$. Demuestra que:

i) D contiene una trayectoria dirigida de longitud al menos k .

ii) Si $k > 0$ entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $k + 1$.

2.- Demuestra que una gráfica $G = (V(G), A(G))$ es conexa si y solo si para cualesquiera dos subconjuntos no vacíos X y Y de $V(G)$ existe una (X, Y) -trayectoria en G .

3.- Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica conexa par. Demuestra que

i) G no tiene puentes.

ii) Para todo vértice $x \in V(G)$, el número de componentes conexas de $G \setminus x$ es a lo más $\frac{d_G(x)}{2}$.

4.- Demuestra que si una digráfica fuerte contiene un ciclo impar (no necesariamente dirigido) entonces contiene un ciclo impar dirigido.

5.- Sea G una gráfica sin lazos y sin vértices de corte. Demuestra que cualesquiera dos ciclos de longitud máxima tienen al menos dos vértices en común.

6.- Sea G una gráfica conexa plana de orden n , tamaño m y cuello $k \geq 3$. Demuestra que $m \leq k \binom{n-2}{k-2}$.

7.- Sea G una gráfica de orden n libre de triángulos, $\alpha'(G)$ su número de emparejamiento y $\chi(G^c)$ el número cromático del complemento de G . Demuestra que $\alpha'(G) = n - \chi(G^c)$.

8.- Sea G una gráfica simple de orden n con grado mínimo δ . Demuestra que si G es conexa y $\delta \leq \frac{n-1}{2}$, entonces G contiene una trayectoria de longitud 2δ .