Examen General. Teoría de las Gráficas
Semestre 2021-2

Duración: 4 horas. Resolver 5 ejercicios de los siguientes 8. (Si se entregan más de 5 ejercicios, se calificará sobre los 5 ejercicios de menor puntaje).

1.- Demuestra que toda gráfica simple G, tal que $\delta(G) \geq 2$, contiene un ciclo de longitud al menos $\delta(G) + 1$.

2.- Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica simple de orden n, tamaño m y que no contiene triángulos. Demuestra que

a) Para toda arista $xy \in A(G)$, $d_G(x) + d_G(y) \leq n$.

b) $\sum_{x \in V(G)} d_G(x)^2 \leq mn$.

3.- Demuestra que todo arco en un digráfica fuertemente conexa está contenido en un ciclo dirigido.

4.- Demuestra que

a) Si una digráfica tiene un camino dirigido cerrado de longitud impar entonces contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

b) Si una digráfica fuertemente conexa contiene un ciclo de longitud impar (no necesariamente dirigido) entonces contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

5.- Sea G una gráfica conexa y sea S un conjunto de aristas de G. Muestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

a) S es el conjunto de aristas de un árbol generador de G.

b) Si $C = (V(C), A(G))$ es un ciclo de G, entonces $A(C) \nsubseteq S$ y S es maximal con respecto a esa propiedad.

c) S intersecta a todo bond de G, y S es minimal con respecto a esa propiedad.

6.- Muestra que toda gráfica 3-conexa por vértices que no sea bipartita contiene al menos cuatro ciclos de longitud impar.

7.- Sea M un emparejamiento maximal en una gráfica G, y sea M^* un emparejamiento máximo en G. Demuestra que $|M| \geq \frac{|M^*|}{2}$.

8.- Muestra que toda gráfica cúbica que tenga una única 3-coloración propia por aristas (salvo por renombrar colores), tiene exactamente tres ciclos hamiltonianos.