EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2020-I, ENERO DE 2020

Duración: 6 horas
Instrucciones:
1. La calificación aprobatoria mínima es 5.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Pueden suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean X y Y variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que $\mathbb{P}[X = 0, Y = 0] = \mathbb{P}[X = 0, Y = 1] = \mathbb{P}[X = 1, Y = 0] = \frac{1}{3}$.

1.1. Encontrar la función de distribución conjunta $F_{X,Y}$ de X y Y.
1.2. Encontrar las funciones de distribución marginales.
1.3. Demuestre que X y Y no son variables aleatorias independientes.
1.4. Encuentre un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tal que, $F_{X,Y}(x_0, y_0) > F_{X,Y}(x_1, y_1)$ para todo $x_1 < x_0$ o $y_1 < y_0$, y que $\mathbb{P}[X = x_0, Y = y_0] = 0$.

Problema 2. Considere el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, donde λ denota a la medida de Lebesgue. Defina a la función $R : \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ por

$$R(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t - [t] \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{si } t - [t] \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Para $n \geq 1$, definimos $R_n(x) := R(2^{n-1}x)$ para $x \in [0, 1)$, y $R_n(1) = 1$.

2.1. Pruebe que $\mathbb{E}(R_n) = 0$ y $\mathbb{V}ar(R_n) = 1$.
2.2. Sea $\mathcal{F}_n := \sigma(R_1, ..., R_n)$. Pruebe que $\mathbb{E}(R_{n+1} 1_A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}_n$.
2.3. Encuentre una versión de la variable $\mathbb{E}(\, R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$.

Problema 3. Sea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = c$. Demostrar que

3.1. si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar(X_n) = 0$ entonces $\{X_n\}_{n\geq 0}$ converge en probabilidad,
3.2. si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{V}ar(X_n) < \infty$ entonces $\{X_n\}_{n\geq 0}$ converge casi seguramente.

Problema 4. Sean T_1 y T_2 dos variables exponenciales independientes, del mismo parámetro 1.

4.1. Pruebe que $T_2 - T_1$ tiene densidad dada por $x \mapsto e^{-|x|}/2$. *Sugerencia:* Puede utilizar la fórmula de convolución.
4.2. Calcule la función característica ϕ de T_j y de $T_2 - T_1$, deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{1}{2} e^{-|x|} \, dx = \frac{1}{1 + u^2}.$$

y que la función característica de $T_2 - T_1$ es un múltiplo de la densidad Cauchy.
4.3. Deduzca por la fórmula de inversión de Fourier que la función característica de una variable Cauchy, con densidad $x \mapsto 1/\pi(1 + x^2)$ está dada por $u \mapsto e^{-|u|}$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Suponga que tiene N objetos que pueden estar pintados con C colores posibles. Se escoge un objeto al azar y se cambia su color por uno de los otros $C-1$ colores aleatoriamente. Se repite el procedimiento.

5.1. Describir la dinámica rigurosamente a través de una cadena de Markov y encontrar su distribución estacionaria.

5.2. Supongamos que el color blanco está entre los C colores. Sea X_n la cantidad total de objetos pintados de blanco tras n elecciones. Encontrar $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ para k entero positivo.

Problema 6. Sea $N = \{N_s,\ s \leq t\}$ un proceso de Poisson de intensidad $\alpha > 0$ en el intervalo $[0,t]$. Para $\beta \in \mathbb{R}$ calcule de manera explícita $\Phi(\beta) = \mathbb{E}\big(e^{\beta N_t}\big)$ y defina la medida $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s : s \leq t)$ mediante la fórmula

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{e^{\beta N_t}}{\Phi(\beta)}\mathbf{1}_A\right), \quad A \in \mathcal{F}_t.$$

Pruebe que N es un proceso de Poisson en $[0,t]$ bajo la medida $\mathbb{Q}$ y calcule su intensidad.

Problema 7.
Considere el siguiente proceso: Se inicia con un palo de longitud 1. Se quiebra en 2 palos (donde el punto de corte es aleatorio), se tira una de las partes y se conserva la otra parte, que será ahora nuestro nuevo palo. Se repite el procedimiento (todos los cortes son independientes entre sí). Sea X_n la longitud del n-ésimo palo.

7.1. Muestre que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es una supermartingala que converge casi seguramente.

7.2. Demuestre que $n^{-1}\log(X_n)$ converge casi seguramente y calcule el límite. *Sugerencia:* $\int_a^b \log(x)dx = (x\log(x) - x)|_a^b$.

Problema 8. Sea $\{B_t : t \geq 0\}$ un movimiento browniano empezando en 0 definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Consideremos el tiempo de paro $D_1 = \inf\{t \geq 1, B_t = 0\}$.

8.1. Mostrar que

$$\mathbb{P}(D_1 \leq t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0, t-1], \tilde{B}_s = -B_1)$$

donde $\{\tilde{B}_t : t \geq 0\}$ es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}_1$. Deducir de lo anterior que $\mathbb{P}(D_1 \leq t) = \mathbb{E}[g(B_1)]$, donde $g(x) = \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t-1]} \tilde{B}_s \geq |x|)$.

8.2. Mostrar que el proceso $\{\hat{B}_s : s \geq 0\}$ definido por

$$\hat{B}_s = \frac{\tilde{B}_{(t-1)s}}{\sqrt{t-1}}$$

es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}_1$ y mostrar que

$$g(x) = \mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,1]} \tilde{B}_{(t-1)s} \geq |x|\Big) = \mathbb{P}(\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |x|)$$

donde $\hat{S}_1 = \sup_{s\in[0,1]} \hat{B}_s$.

8.3. ¿Cuál es la relación entre la ley de $\hat{S}_1$ y la de $|B_1|$? ¿Son independientes? Mostrar que

$$\mathbb{P}(D_1 \leq t) = \mathbb{P}\Big(1 + \frac{N^2}{\hat{N}^2} \leq t\Big)$$

donde N y $\hat{N}$ son dos variables gaussianas estándar independientes. Concluir que la variable D_1 tiene densidad

$$f(u) = \frac{1}{\pi u\sqrt{u-1}}\mathbf{1}_{\{\mathbf{u}>\mathbf{1}\}}.$$