EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2020-I, AGOSTO DE 2020

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es 5.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea X una variable con función de densidad $f(x) = e^{-x}$, para x positivo. Para $t > 0$ defina $Y = \min\{X, t\}$. Calcule rigurosamente $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Problema 2. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes que toman el valor $+1$ o -1 de forma equiprobable. Para cada $S \subseteq \{1, ..., n\}$ no vacío defina la variable $Y_S = \prod_{i \in S} X_i$.

2.1. Pruebe cuidadosamente que, para $S, T \subseteq \{1, ..., n\}$ no vacíos, donde $S \neq T$, las variables Y_S y Y_T son independientes.

2.2. Defina $Z = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1,...,n\}} Y_S$. Calcule explícitamente la cota dada por la desigualdad de Chebyshev aplicada a la variable Z. ¿Qué pasa con la diferencia entre la probabilidad y su cota, cuando n crece a infinito?

Problema 3. Defina $\phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}$. Sea X una variable aleatoria con densidad ϕ y $x > 0$.

3.1. Pruebe que $\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-x^2}$.

3.2. Muestre que

$$\left(\frac{x}{1 + x^2}\right) \phi(x) \leq \mathbb{P}(X \geq x) \leq \min\left\{\frac{1}{x}, 1\right\} \phi(x).$$

Problema 4. Demuestre que si $\{X_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión monótona de variables aleatorias que converge en probabilidad a una variable aleatoria X, entonces la convergencia se da también de forma casi segura.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Consideremos una población de insectos machos y hembras. Entre cada macho y cada hembra, existe un reloj exponencial de parámetro λ. Todos los relojes son independientes. Al sonar alguno de tales relojes, ocurre un emparejamiento entre el macho y la hembra asociados al reloj y ocurren dos sucesos: nace inmediatamente un nuevo individuo con la misma probabilidad de ser macho o hembra (y ya listo para emparejarse), y la hembra devora al macho. Denotemos por $(N_1(t), N_2(t))$ al número de machos y hembras al tiempo t. Modele el proceso como una cadena de Markov, dando el espacio de estados, las tasas de cambio y la matriz de probabilidades de salto de un estado a otro. ¿Cuáles son todas las distribuciones estacionarias del proceso?

Problema 6. Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d tal que

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = 2) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Proporcione un ejemplo de una martingala de la forma $X_n := f(Y_1, \ldots, Y_n)$, para alguna función f, tal que X_n converge c.s. a 0 pero **no** converge en L^1 a 0.

Problema 7. Sean $(X_n, n \geq 1)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Recuerde que la hipótesis iid es equivalente a que, para cada n, $\mathbb{P}(\, X_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A)$ donde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Considere a la caminata aleatoria $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$, donde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ y $S_0 = 0$ (defina también $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). Suponga que $B = (B_n, n \geq 1)$ es una sucesión predecible de variables Bernoulli (B_n es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible) y sea T_n el índice en que aparece el n-ésimo uno dentro de la sucesión B.

7.1. Pruebe que $(X_{T_n}, n \geq 1) \stackrel{d}{=} (X_n, n \in \mathbb{N})$.
7.2. Pruebe que $\sum_{i=1}^{T_n} B_i X_i \stackrel{d}{=} S_n$.

Problema 8.
Sea $X := \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso de Markov con valores en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y probabilidades de transición dadas por

$$(1) \qquad P_t(x, A) := \mathbb{P}(X_{s+t} \in A | X_s = x) = \int_A \phi(y \mid xe^{-\alpha t} + \mu[1 - e^{-\alpha t}], \tau[1 - e^{-2\alpha t}]) dy,$$

para todo $s > 0$, con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, α, $\tau > 0$, definida para $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y donde $\phi(y \mid \mu, \sigma^2)$ denota la densidad de una v.a. Normal con media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma^2 > 0$.

8.1. Encuentre la distribución límite, π, de X. ¿Se trata de una medida invariante para (1)?
8.2. Suponga que el proceso X tiene a la distribución π definida el inciso anterior como distribución inicial. Encuentre $\mathbb{C}ov\,(X_t, X_0)$.
8.3. ¿Se trata de un proceso gaussiano? Justifique su respuesta.