EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2020-II, ? DE FEBRERO DE 2021

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es 5.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, integrables y con $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$. Defina

$$X_n^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Diga porqué $X_n^{(k)}$ es integrable o si falta una hipótesis adicional. Defina $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y calcule

$$\mathbb{E}\Big(X_{n+1}^{(k)} \,\Big|\, \mathcal{F}_n \Big).$$

Problema 2. Sean N una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada.

2.1. Justifique la derivación bajo la integral para ver que la función u dada por

$$u(t, x) = \mathbb{E}\Big(f(\sqrt{t}N + x)\Big)$$

satisface la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.2. Suponga, adicionalmente, que f es continua y pruebe que $\lim_{t \to 0} u(t, x) = f(x)$.

Problema 3. Muestre que si (X_n) es una colección de variables aleatorias independientes entonces

$$\sup_n X_n < \infty \text{ casi seguramente si y sólo si } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > A) < \infty \text{ para alguna } A > 0.$$

Problema 4. Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con función de distribución F_X. Recuerde que su función característica, denotada por φ_X, se define como

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \quad \text{para toda} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.1. Demuestre que para $x, h \in \mathbb{R}$

$$|e^{ihx} - 1| = \sqrt{2(1 - \cos(hx))} = 2|\mathrm{sen}(hx/2)|,$$

y que tal expresión implica que para $t, h \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{sen}(hx/2)| dF_X(x).$$

4.2. Si $\{h_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión real tal que $h_n \to 0$ y $f_n(x) = 2|\mathrm{sen}(h_n x/2)|$ para $n \geq 1$, usando un teorema de integración, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dF_X(x) = 0,$$

y concluya que $\varphi_X(t)$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea (X_n) una cadena de Markov a tiempo discreto con valores en $\mathbb{Z}$ y transición

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = q, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

donde $q = 1 - p$ y $p \in (0,1)$.

5.1. Pruebe que para cualquier sucesión de enteros $i_1, i_2, ..., i_{n-1}, i$ ocurre

$$\mathbb{P}\left(X_n = i \,\middle|\, |X_n| = i, |X_{n-1}| = i_{n-1}, ..., |X_1| = i_1\right) = \frac{p^i}{p^i + q^i}.$$

5.2. Demuestre que $(|X_n|)$ es una cadena de Markov y calcule explícitamente su matriz de transición. Sugerencia: utilice el inciso anterior.

Problema 6.
Sea (M_n) una martingala que inicia en el origen tal que $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$. Muestre que para todo c real $((M_n - c)^2)$ es una submartingala, y utilice ese hecho para probar que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} M_k \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n^2)}{\mathbb{E}(M_n^2) + \lambda^2},$$

para todo λ positivo.

Problema 7. Considere un proceso Poisson de tasa $\lambda > 0$ con tiempos de arribo $S_1, S_2, S_3, ...$ Definamos a las variables aleatorias $A_t = t - S_{N_t}$ y $R_t = S_{N_t+1} - t$, para $t > 0$ fijo.

7.1. Calcule la densidad conjunta de (A_t, R_t).

7.2. Calcule la densidad conjunta asintótica de (A_t, R_t), cuando t tiende a infinito.

Problema 8. Si $B^1, \ldots, B^d$ son movimientos Brownianos independientes y $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s^i : i \leq d, s \leq t)$, pruebe que

8.1. B^i es un $(\mathcal{F}_t)$-movimiento Browniano.

8.2. $(B^1 + \cdots + B^d)/\sqrt{d}$ es un $(\mathcal{F}_t)$-movimiento Browniano.

Sugerencia: Utilice que cada B^i es un proceso Gaussiano.