EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2021-II, 30 DE JULIO DE 2021

Duración: 6 horas
Instrucciones:
1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes y no negativas.

1.1. Defina
$$A = \left\{ \sum_i X_s < \infty \right\}.$$
Demuestre que $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

1.2. Sea $\tau = \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(\{X_i : i \geq n\})$, es decir la σ-álgebra cola o de eventos remotos de la sucesión (X_i). Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es τ-medible pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. *Sugerencia:* ¿Cómo es la función de distribución de X?

Problema 2. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias tal que $0 \leq X_n \leq a_n$ y $a_n \to \infty$. Pruebe que si $\mathbb{E}(a_n - X_n)$ es una sucesión acotada entonces $X_n/a_n \to 1$ en probabilidad.

Problema 3. Sean $\Omega = (0,1]$ y $A_i = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $\mathcal{A}_n$ la σ-álgebra generada por $\{A_i : i \leq n\}$ y $\mathbb{P}$ la medida de Lebesgue en $(\Omega, \mathcal{B}(0,1])$.

3.1. Sea $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 + x + 1$. Calcule $\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_n)$ para todo n natural.

3.2. Sean $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f_n(x) = i$ si y solo si $x \in A_i$ para todo $i \leq n$. Calcule $\mathbb{E}(f_n|\mathcal{A}_n)$ y $\mathbb{E}(f_n|\mathcal{A}_{2n})$ para todo n natural.

Problema 4. Sea $C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada y continua } \}$. Sean $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Recuerde que P_n converge en ley a P_0, denotado por $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$, si y sólo si para cada $f \in C_b(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f dP_n \to \int_{\mathbb{R}} f dP_0$ cuando $n \to \infty$.

Sean $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tales que $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$, y sean $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ sus funciones de distribución. En este ejercicio demostrará que para todo punto de continuidad t de F_0 ocurre que $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F_0(t)$. Para todo $t, x \in \mathbb{R}$ y para cada $\delta > 0$ defina
$$f_{t,\delta}(x) = \min\left\{1, \max\left\{0, \frac{t-x}{\delta}\right\}\right\}.$$

4.1. Grafique $f_{t,\delta}(x)$ y verifique que $f_{t,\delta} \in C_b(\mathbb{R})$.

4.2. Demuestre que para toda $n \geq 1$, $F_n(t) \geq \int_{\mathbb{R}} f_{t,\delta} dP_n$ y que $\int_{\mathbb{R}} f_{t,\delta} dP_0 \geq F_0(t-\delta)$, y también que para toda $n \geq 1$, $F_n(t) \leq \int_{\mathbb{R}} f_{t+\delta,\delta} dP_n$ y que $\int_{\mathbb{R}} f_{t+\delta,\delta} dP_0 \leq F_0(t+\delta)$

4.3. Concluya, usando puntos de continuidad de F_0.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Considere el árbol binario infinito (es decir, un árbol en donde cada vértice tiene siempre dos hijos y un padre -excepto la raíz que está fija y no tiene padre-). Una caminata aleatoria (X_n) en tal árbol es una cadena de Markov con espacio de estados en los vértices y donde en cada momento se elige a un vecino (padre o hijos) de forma equiprobable para el siguiente estado de la cadena. Definamos a la profundidad $\mathrm{prof}(v)$ de un vértice v por la cantidad mínima necesaria de pasos a través del árbol para llegar de tal vértice a la raíz. Definamos el proceso (D_n) por $D_n = \mathrm{prof}(X_n)$.

5.1. Sea $T_{0,M}$ el tiempo en donde el proceso (D_n) llega por primera vez a 0 o a M. Defina $p_M(i) = \mathbb{P}(D_{T_{0,M}} = 0 | D_0 = i)$ para $0 \leq i \leq M$. Pruebe que

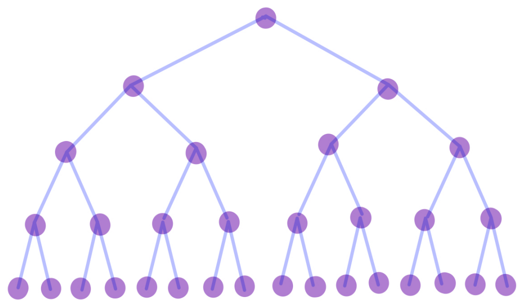
$$p_M(i) = \frac{1}{3} p_M(i-1) + \frac{2}{3} p_M(i+1).$$

5.2. Utilice el inciso anterior para probar que $p_M(i)$ es de la forma

$$p_M(i) = a_M + b_M \left(\frac{1/3}{2/3} \right)^i,$$

para algunas constantes a_M y b_M y pruebe que $\lim_{M\to\infty} p_M(i) = 2^{-i}$.

5.3. Concluya que (X_n) es una cadena de Markov transitoria.



Problema 6. Supongamos que tenemos una urna con bolas negras y bolas blancas. Inicialmente tenemos una bola de cada color. En cada paso, extraemos una bola al azar de la urna y regresamos dos bolas del mismo color dentro de la urna (la extraída más otra). Sea X_n el número de bolas blancas en la urna tras n extracciones. Demuestre que $M_n = X_n/(n+2)$ es una martingala convergente y encuentre explícitamente la distribución de $M_\infty := \lim_{n\to\infty} M_n$. *Sugerencia:* Pruebe que para todo $n \geq 0$ ocurre que $\mathbb{P}\left(M_n = \frac{i}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1}$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Problema 7. Sea $(N_t, t \geq 0)$ un proceso de renovación y defina $k(t) = \mathbb{E}[N_t^2]$. Demuestre que

$$k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) F^{*n}(t),$$

donde F es la función de distribución del tiempo interarribo.

Problema 8. Sea $(B_t, t \geq 0)$ un movimiento browniano y defina el proceso $(X_t, t \in [0,1])$ por $X_t = B_t - tB_1$.

8.1 Muestre que $(X_t, t \in [0,1])$ es un proceso Gaussiano.

8.2 Encuentre la covarianza $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ para $0 \leq s, t \leq 1$.

8.3 Muestre que $(X_t, t \in [0,1])$ no tiene incrementos independientes.