EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2022-I, MARTES 11 DE ENERO DE 2022

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ espacios de probabilidad para $i \in \{1, 2\}$ y defina $\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{F}_i\}$. Pruebe que a lo más existe una medida $\mathbb{P}$ en $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ tal que $\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\,\mathbb{P}_2(A_2)$. Asuma que dicha medida $\mathbb{P}$ existe y defina $\pi_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i$ dada por $\pi_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i$. Pruebe que π_1 y π_2 generan σ-álgebras independientes.

Problema 2. Sea X una variable aleatoria no negativa con variancia finita y $\alpha \in (0, 1)$. Pruebe que

$$\mathbb{P}(X > \alpha\mathbb{E}(X)) \geq (1-\alpha)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Sugerencia: Recuerde que $X = X1_{\{X > \alpha\mathbb{E}(X)\}} + X1_{\{X \leq \alpha\mathbb{E}(X)\}}$.

Problema 3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es decir $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$. Pruebe que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbb{E}\big(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n|>c}\big) = 0.$$

Sugerencia: La idea de la desigualdad de Markov y la desigualdad de Hölder le pueden ser de utilidad.

Problema 4. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables independientes con distribución común F. La función de distribución empírica F_n se define como

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_n \leq x\}}.$$

1. Pruebe que, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) \to F(x)$ casi seguramente conforme $n \to \infty$. Enuncie un teorema límite central para $F_n(x)$.
2. Cuando F es la distribución uniforme, defina $X_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - x)$. Para $0 \leq x \leq y \leq 1$, calcule $\mathbb{E}([X_n(y) - X_n(x)]^2)$. Por otra parte, al desarrollar el cuadrado, calcule $\mathbb{E}(X_n(x)X_n(y))$. Utilice esto para enunciar y probar un teorema límite central para $(F_n(x), F_n(y))$, con una matriz de covarianzas igual a

$$\begin{pmatrix} c(x,x) & c(x,y) \\ c(x,y) & c(y,y) \end{pmatrix},$$

donde $c(x, y) = x(1-y)$. Opcionalmente, diga si reconoce a la anterior función de la teoría de procesos Gaussianos.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea P una matriz asociada a una cadena de Markov con espacio de estados I que es doblemente estocástica ($\sum_{i\in I} P_{i,j} = \sum_{j\in I} P_{i,j} = 1$). Demuestre que:

1. Si I es finito, entonces todos los estados son recurrentes positivos.
2. Si I es infinito y P es irreducible, entonces todos los estados son transitorios o recurrentes nulos.

Problema 6. Considere la siguiente generalización de un proceso Poisson. Sea $N(a,b]$ la cantidad de puntos del proceso en el intervalo $(a,b]$. Suponga que para toda colección de conjuntos $\{(a_i,b_i]\}_{i=1}^k$ disjuntos en $[0,\infty)$ ocurre que

$$\mathbb{P}\Big(N(a_i,b_i] = n_i,\ \forall i = 1,...,k\Big) = \int_0^\infty f(x) \prod_{i=1}^k \frac{(x(b_i-a_i))^{n_i}}{n_i!} e^{-x(b_i-a_i)}\,dx,$$

es decir la intensidad λ es aleatoria y tiene una función de densidad f con soporte contenido en $(0,\infty)$. Pruebe que

$$\mathrm{Var}(N(0,t]) \geq \mathbb{E}(N(0,t])\,,$$

donde la igualdad ocurre exclusivamente cuando λ es constante. *Sugerencia: Condicione en el valor de λ.*

Problema 7. Sean T un tiempo de paro, M una martingala y $0 \leq s \leq t$. Recuerde que el teorema de muestreo opcional nos dice que $\mathbb{E}(M_{t\wedge T} \mid \mathcal{F}_{s\wedge T}) = M_{s\wedge T}$ y que por lo tanto $M^T = (M_{t\wedge T}, t \geq 0)$ es una $(\mathcal{F}_{t\wedge T})$-martingala. El objetivo de este ejercicio es mostrar que M^T es de hecho una $(\mathcal{F}_t)$-martingala.

1. Pruebe que N es una $(\mathcal{F}_t)$-martingala si y sólo si $\mathbb{E}(N_T) = \mathbb{E}(N_0)$ para cualquier tiempo de paro T acotado. *Sugerencia: Para el regreso basta suponer la hipótesis para tiempos de paro que toman 2 valores y tienen la forma $T = s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{A^c}$ donde $A \in \mathcal{F}_s$ y $s \leq t$.*
2. Sean $0 \leq s \leq t$ y $A \in \mathcal{F}_s$. Pruebe que $\mathbb{E}(M_{t\wedge T}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(M_{s\wedge T}\mathbf{1}_A)$ al descomponer las esperanzas sobre $\{T \leq s\}$ y su complemento.

Problema 8. Sea B es un movimiento Browniano y $t_i = i\delta$ para algún $\delta > 0$. Dadas $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles, demuestre que el proceso estocástico a tiempo discreto $(X_{t_i}, i \geq 0)$ dado por

$$X_0 = x \quad \text{y} \quad X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \sigma(X_{t_n})\left(B_{t_{n+1}} - B_{t_n}\right) + b(X_{t_n})\,(t_{n+1} - t_n)$$

es una cadena de Markov (homogénea) con espacio de estados continuo.