EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2023-I, LUNES 24 DE JULIO DE 2023

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias discretas definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Demostrar que las variables $\{X_i\}_{i=1}^n$ son independientes si y sólo si

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \Pi_{i=1}^n P(X_i = x_i) \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Problema 2. Dar un ejemplo de variables aleatorias U y V definidas en el mismo espacio de probabilidad tales que U y V tengan densidades, pero (U, V) no la tenga. *Sugerencia*: Suponga que U y V tienen densidades uniformes en $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue.

Problema 3. Sean $Y_0, Y_1, Y_2 \ldots$ variables aleatorias en $\mathbb{R}^2$ definidas de manera recursiva: $Y_0 = (1,0)$ c.s. y Y_{n+1} se obtiene lanzando un punto uniformemente al azar en el disco de centro $(0,0)$ y de radio $||Y_n||$.

3.1 ¿Son independientes las variables aleatorias? Encontrar $\mathbb{E}(Y_n | Y_{n-1})$ y $\mathbb{E}(Y_n)$ para $n \geq 1$.

3.2 ¿Son independientes las variables aleatorias $Z_1, Z_2, \ldots$ definidas por $Z_{i+1} = Y_{i+1}/||Y_i||$? ¿Tienen la misma distribución?

3.3 Calcular la función de distribución de $||Z_1||$. ¿Cuál es la ley de $\log ||Z_1||$? Deducir $\mathbb{E}(\log ||Z_1||)$.

3.4 Estudiar el límite c.s. de $\log ||Y_n||$ y el límite en distribución de esta variable ya centrada, ambas renormalizadas de manera correcta. *Sugerencia:* utilice los incisos 3.2 y 3.3.

Problema 4. Sea F la función de distribución de una variable aleatoria no-negativa X y sea φ su transformada de Laplace. Sea T una variable aleatoria exponencial de media 1 independiente de X. Considere $\beta \in (0,1)$.

4.1 Calcule $\mathbb{E}(T^\beta)$ y vea que dicha cantidad es finita.

4.2 Pruebe que

$$1 - \varphi(\lambda) = \mathbb{P}(T \leq \lambda X) = \mathbb{E}\big(\overline{F}(T/\lambda)\big),$$

donde $\overline{F}(x) := 1 - F(x)$.

4.3 Suponga que $\overline{F}$ tiene colas pesadas: existe $\beta \in (0,1)$ tal que $\overline{F}(x) \sim cx^{-\beta}$ conforme $x \to \infty$ (es decir, $\lim_{x\to\infty} \overline{F}(x)x^\beta = c$). Pruebe que:

$$1 - \varphi(\lambda/n) \sim \mathbb{E}\big(T^{-\beta}\big)\, \lambda^\beta / n^\beta$$

y deduzca que si $X_1, \ldots, X_n$ son copias independientes de X entonces $[X_1 + \cdots + X_{n^\beta}]/n$ converge en distribución a una variable aleatoria cuya transformada de Laplace es $\lambda \mapsto e^{-\Gamma(1-\beta)\lambda^\beta}$. *Sugerencia:* escriba $\varphi(\lambda/n)^{n^\beta} = [1 - (1 - \varphi(\lambda/n))]^{n^\beta}$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Suponga que $\mathbb{P}(X_1 = 4 \mid X_0 = 0) = 1$ y que si la cadena está en el estado $i > 0$, entonces el siguiente estado lo elige de manera uniforme entre los estados $0, 1, ..., i-1$.

5.1 Calcule todas las distribuciones límite (o muestre que no existe ninguna).

5.2 Calcule la proporción de tiempo a largo plazo que la cadena pasa en el estado i, para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5.3 Defina la variable $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i | X_0 = i\}$. Calcule $\mathbb{E}(T_i)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Problema 6. El hotel A ofrece transportación gratuita (camioneta) saliendo del aeropuerto. Posibles clientes llegan como un proceso de Poisson con una tasa de 10 personas por hora. Cuando se juntan 7 personas dentro de la camioneta, ésta las lleva al hotel y regresa al aeropuerto en 36 minutos. Si una persona llega y no está la camioneta, decide irse a otro hotel. A tiempos grandes, ¿cuál es la fracción de clientes que llegan al hotel A?

Problema 7. Es conocido que la serie armónica $1 + 1/2 + 1/3 + ...$ diverge mientras que la serie armónica alternante $1 - 1/2 + 1/3 - ...$ converge. Qué pasa si elegimos los $+$ y $-$ de manera aleatoria? Considere una sucesión de variables independientes $X_1, X_2, ...$ con $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Sea $M_0 = 0$ y

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} X_j, \qquad n > 0.$$

Muestre que M_n es una martingala uniformemente integrable. Muestre si converge o no; y si lo hace, calcule la esperanza del límite.

Problema 8. El objetivo del ejercicio es mostrar probabilísticamente que

$$\int_0^\infty a \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2x^2} e^{-b^2/x^2}\, dx = e^{-2ab}.$$

8.1 Sea $\overline{B}_t = \sup_{s \leq t} B_s$. Del principio de reflexión $\overline{B}_t \stackrel{d}{=} |B_t|$ y la autosimilitud del movimiento Browniano, interprete la integral como $\mathbb{P}\big(\overline{B}_{T/2a^2} > b\big)$, donde T es exponencial estándar e independiente de B.

8.2 Sea $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : B_t > x\}$. Argumente que $\{\tau_x > t\} = \big\{\overline{B}_t > x\big\}$.

8.3 Justificando su respuesta cuidadosamente, condicione para probar que $\mathbb{P}(\tau_x > T/\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda \tau_x}\big)$ y concluya al utilizar que el lado derecho es igual a $e^{-x\sqrt{2\lambda}}$.