Examen General de Medios Continuos

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los problemas que está resolviendo.

1. Una partícula de masa m está restringida a moverse sobre el paraboloide de revolución $z = \alpha(x^2 + y^2)$ donde $\alpha > 0$ (cuyo eje es vertical), bajo la influencia de la gravedad y sin fricción.

   (a) Encontrar el problema con un grado de libertad que describe el movimiento.

   (b) ¿Qué condiciones debe satisfacer la velocidad inicial de la partícula para que el movimiento sea circular?

   (c) Encontrar el periodo de oscilaciones pequeñas alrededor del movimiento circular encontrado en el inciso (b).

2. Considere la ecuación
$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\lambda A - \frac{A}{1+|A|^2},$$
   donde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es una constante.

   (a) Suponga primero que tanto A como $\lambda = \omega$ son reales. Escriba la ecuación como un sistema Lagrangiano con un grado de libertad. Haga un dibujo del plano fase para los rangos de valores de ω relevantes. Indique los puntos de equilibrio e indique su estabilidad en cada caso. Identifique valores de ω para los cuales existen órbitas periódicas y separatrices.

   (b) Considere ahora el caso general en que $A = x + iy$, $\lambda = \omega + i\nu$ son complejos. Escriba la ecuación como un sistema de dos ecuaciones acopladas para x e y ¿Para que valores de λ se obtiene un sistema conservativo ?

   (c) Determine la estabilidad lineal del origen para el caso general en que $\lambda = \omega + i\nu$ es complejo.

3. Considere dos partículas de masas m_1, $m_2 > 0$ en posiciones x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ respectivamente que se mueven sobre la recta. Las partículas interactúan a través de un potencial repulsivo de la forma $V(r) = r^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, donde $r = |x_2 - x_1|$ es la distancia entre las dos partículas.

   (a) Escriba el Lagrangiano del sistema en las coordenadas X, x donde X es la posición del centro de masa y $x = x_2 - X$. Identifique las cantidades conservadas y describa cualitativemente el movimento. Incluya un dibujo del plano fase para las cantidades x, $\dot{x}$, (con $x > 0$). Muestre que $x_2(0) > x_1(0)$ implica $x_2(t) > x_1(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y $x(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Considere ahora la condición inicial $x_1(0) = -R < 0$, $\dot{x}_1(0) = v > 0$, y $x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Escriba una expresión explícita de $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ en términos de m_1, m_2, v en el límite cuando t, $R \to \infty$. (Uno puede obtener el resultado para $t \to \infty$ con R finito, se pide la expresión simplificada para $R \to \infty$.)

4. Un cilindro pequeño de radio r rueda sin resbalar dentro de un cilindro grande de radio R, que está fijo, donde $R > 2r$. El cilindro pequeño es atraído hacia abajo por la fuerza de gravedad. Tiene masa m y su momento de inercia, respecto de su eje de simetría, es I.

   (a) Determine el número de grados de libertad del problema, escriba el Lagrangiano correspondiente y encuentre las ecuaciones de movimiento.

   (b) Encuentre los equilibrios y calcule la frecuencia de oscilaciones pequeñas cuando el cilindro está en la parte inferior del cilindro mayor.