Examen General de Medios Continuos

Se deben escoger 3 de los 4 problemas para resolverlos.

1. Sea el Langrangiano
$$L = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - V(q),$$
$q \in \mathbf{R}$. La masa depende de q, y suponemos que $m(q)$ es C^∞ y satisface $m(q) \geq \delta^2 > 0$, $\forall q \in \mathbf{R}$. El problema es la versión simplificada de un grado de libertad del problema de movimiento geodésico con potencial.

   (a) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange para L, defina el momento canónico p y escriba el Hamiltoniano H. Encuentre los puntos críticos de H.

   (b) Sea $V(q) = \frac{1}{2}q^2$. Muestre que todas las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para H son acotadas y que los puntos fijos son estables.

   (c) En algunas aplicaciones la función $m(q)$ no es conocida explícitamente y se da en una forma aproximada, por ejemplo, como una expanción en un pequeño parámetro $\epsilon > 0$, $m(q) = a_0 + \epsilon a_1 q + \epsilon a_2 q^2 + \dots$ (que suponemos converge a m en todo $\mathbf{R}$). Sean $a_0 = a_1 = 1$. Compruebe que el Hamiltoniano H de los incisos (a), (b) tiene la forma
$$H = H_1 + O(\epsilon^2), \quad H_1 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{\epsilon}{2}p^2 q,$$
usando $m(q) = 1 + \epsilon q + O(\epsilon^2)$, $[m(q)]^{-1} = 1 - \epsilon q + O(\epsilon)$. (La aproximación de m por $1 + \epsilon q$ es solo buena para q cerca del origen.)

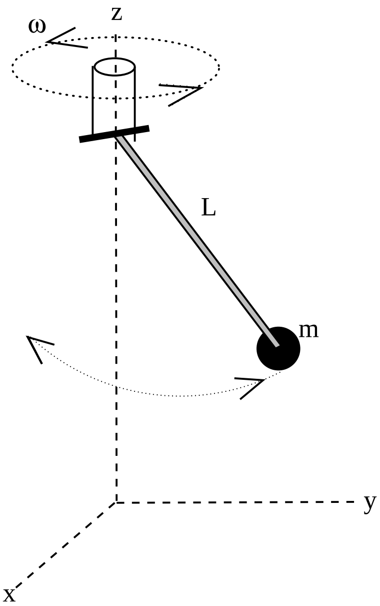
   Encuentre los puntos fijos del sistema Hamiltoniano de H_1 y su estabilidad lineal. Compare con los puntos críticos de H. Muestre que el origen es estable para ambos Hamiltonianos.

2. Consideremos un péndulo cuyo brazo es rígido y toda la masa m del péndulo se concentra a una longitud L. Supongamos que el punto donde se suspende el péndulo gira a una velocidad angular constante que es ω.

   a) Determine las ecuaciones de movimiento.

   b) Encuentre los puntos fijos de estas ecuaciones de movimiento.

   c) Considerando oscilaciones pequeñas alrededor de los puntos fijos, determine la frecuencia de oscilación.



3. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= -\phi, \\ \dot{\phi} &= -\zeta + \omega(im\phi + \psi), \\ \dot{\psi} &= \omega(im\psi - \phi), \end{aligned} \tag{1}$$

con ω, m constantes reales. El problema es la versión simplificada de un problema de propagación de ondas planetarias. Se considera primero el caso de $m = 0$, y después el caso general.

(a) Considere (1) con $m = 0$, y soluciones ζ, ϕ, ϕ reales. En este caso tenemos un sistema lineal de la forma $\dot{x} = Ax$, con $x = [\zeta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ y A una matriz antisimétrica. Sea $|\cdot|$ la norma Euclideana en $\mathbb{R}^3$. Muestre que si $x(t)$ es una solucion del sistema, entonces $|x(t)|$ y $|\dot{x}(t)|$ son constantes. Muestre que existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Describa qualitativamente las soluciones del sistema, mostrando que sus trayectorias consisten de puntos fijos y órbitas periódicas.

(b) Considere (1) con m real arbitrario. Se puede argumentar que en este caso el sistema tiene que ser resuelto para ζ, ϕ, ϕ con valores complejos. Escriba el sistema en $\mathbb{R}^6$ para las partes reales y imaginarias correspondientes $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Muestre que este sistema tiene la forma $\dot{y} = My$, $y = [\zeta_1, \zeta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2]^T$, con M una matriz antisimétrica. Muestre que $\dot{y} = My$ se puede también escribir como un sistema Hamiltoniano, con las partes reales ζ_1, ϕ_1, ψ_1 como posiciones canónicas, y las partes imaginarias ζ_2, ϕ_2, ψ_2 como momentos canónicos. Identifique el Hamiltoniano del sistema.

4. Un par de barras A y B estan sujetas por medio de bisagras tal como se ve en al figura. La barra A tiene una bisagra al suelo y está sujeta al suelo, la otra bisagra une a las dos barras (note que el ángulo que forman las dos barras respecto al suelo es el mismo). Estas barras solo se pueden mover en el plano, la longitud de ambas

barras es a y su masa es m. Considere que no existe fricción entre las bisagras y tampoco hay fricción de la barra B al suelo. Si solo existe la fuerza de gravedad y los momentos de inercia de ambas barras son I (los momentos de inercia son determinados en los extremos de las barras), la barra B siempre esta en contacto con el suelo:

a) Determine cuantos grados de libertad tiene el problema y las ecuaciones de movimiento.

b) ¿Cuántos puntos fijos tiene este problema?

c) Determine el tiempo de caída de las barras en función del ángulo α hasta que ambas barras alcanzan el suelo suponiendo que el ángulo inicial α_0 es muy pequeño