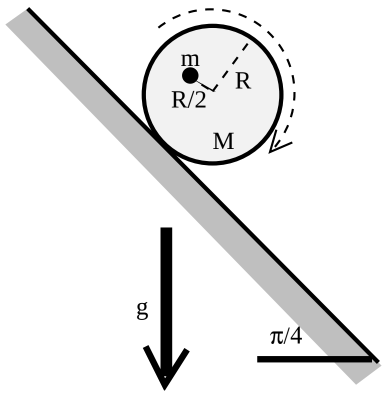
Examen General de Medios Continuos

La duración del examen es de 3 horas

1. A una rueda homogénea de radio R, espesor A y de masa M se le ha agregado una masa m a una distancia $R/2$ del centro de la rueda. Esta rueda desciende por una rampa que está a 45^o de inclinación con respecto al suelo. La rueda gira sin resbalar y la fuerza de gravedad apunta hacia abajo tal como se ve en la figura. Supongamos que no existe pérdidas de energía en este movimiento, que la longitud de la rampa es suficientemente larga y que la rueda comienza a rodar al tiempo cero.

   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de la rueda al descender por la rampa.

   b) Determine a que tiempo la rueda pierde contacto con la rampa.



2. Considere dos masas m_1 y m_2 que se mueven bajo su propia inercia (sin potencial) en el plano sujetas a las restricciones (holónomas) de que la distancia entre ellas permanece constante durante el movimiento (vea la figura).

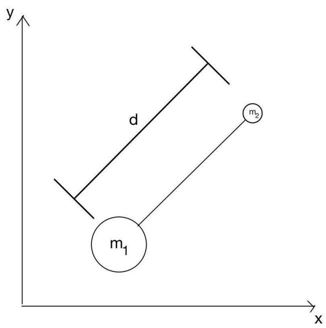


Figura 1: Las dos masas se mueven de forma que la distancia d es constante durante el movimiento.

Encuentre el espacio de configuraciones y las ecuaciones de movimiento en las coordenadas generalizadas adecuadas. Resolva las ecuaciones y describa el movimiento.

3. Sea la ecuación noautónoma de segundo orden

$$-\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{dx}{dt}\right) = Ex, \tag{1}$$

donde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un función dada que es C^∞ en todo $\mathbb{R}$, y $b-$periódica en t. Suponemos ademas que existe $a_0 > 0$ tal que $a(t) \geq a_0$, para todo t real. El parametro E se supone real y positivo.

En este problema nos interesa el comportamiento de las soluciones variando el parámetro E, dada una función periódica a.

(a) Escribe el Langrangiano y Hamiltoniano del sistema.

(b) Dado $E > 0$, sean $\Psi_1(t; E)$, $\Psi_2(t; E)$ soluciones de (1) con condiciones iniciales

$$\Psi_1(0; E) = 1, \quad \Psi_1'(0; E) = 0; \quad \Psi_2(0; E) = 0, \quad \Psi_2'(0; E) = 1 \tag{2}$$

respectivamente ($'$ la derivada respecto a t). La notación subraya la dependencia en E. Calcule

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi_1(t; E)\Psi_2'(t; E) - \Psi_1'(t; E)\Psi_2(t; E)\right), \tag{3}$$

y muestre que $a(t)[\Psi_1(t; E)\Psi_2'(t; E) - \Psi_1'(t; E)\Psi_2(t; E)]$ es constante en t, para cada $E > 0$. Como se relaciona esta observación con la estructura Hamiltoniana de la ecuación ?

(c) Muestre que las soluciones de (1) son acotadas para todo t real si y solo si las soluciones Ψ_1, Ψ_2 satisfacen

$$|\Psi_1(b; E) + \Psi_2'(b; E)| \leq 2. \tag{4}$$