EXAMEN GENERAL DE MEDIOS CONTINUOS

Se deben resolver los tres problemas en un término de tres horas

1. Sea una partícula puntual de masa $m = 1$ que esta moviendo en la superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ que se describe por el grafo de $z = f(x, y)$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. La función f es suave en todo $\mathbb{R}^2$.

   (a) Mostrar que la energía cinética $K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ del sistema restringido es de la forma $K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$, donde $q_1 = x$, $q_2 = y$, y $g(q)$ es una matriz simétrica positiva definida. Relacione las entradas $g_{i,j}$ con la función f y sus derivadas parciales.

   (b) Sea el Langrangiano $L = K(q, \dot{q})$, con $K(q, \dot{q})$ de (a). Encuentre el momento canónico y el Hamiltoniano.

   (c) Sea $L = K - U$, K como en (a), y $U = U(q)$ una función suave en $\mathbb{R}^2$. Escriba las ecuaciones de Hamilton, y encuentre los puntos fijos.

2. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven en el plano bajo las siguientes condiciones:

   La partícula m_1 está restringida a moverse en el eje de las x y la partícula m_2 al eje de las y.

   Las partículas se mueven bajo la influencia del potencial

   $$U = \frac{-k}{d(m_1, m_2)}$$

   donde $k > 0$ es una constante y $d(m_1, m_2)$ es la distancia euclidiana entre m_1 y m_2.

   (a) Dar el espacio de configuraciones del sistema y el número de grados de libertad.

   (b) Escribir el Lagrangiano del problema.

   (c) En el caso en que $m_1 = m_2 = 1$, escribir el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares y encontrar una variable cíclica y su correspondiente cantidad conservada.

(d) El sistema del inciso anterior, con una cantidad conservada, se puede escribir como un sistema de un grado de libertad. Escribir el sistema y determinar una condición sobre la energía del sistema para que el movimiento de las partículas sea acotado.

3. Un satélite de masa m gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular de radio a. La Tierra tiene masa M (y considere que el valor de la constante de atracción gravitacional es $G = 1$). Queremos cambiar la órbita del satélite a una nueva órbita que sea coplanar a la órbita original y que sea también una órbita circular pero de radio b. Como el satélite solo puede cambiar su velocidad de desplazamiento, decidimos primero pasar por una órbita de transferencia, la cual es una órbita elíptica que también es coplanar a la órbita inicial. Esta órbita elíptica es tangente a la órbita circular de radio a en su punto de epigeo y tangente a la órbita circular b en su punto de apogeo, tal como se ve la figura. Determine cuál debe ser el cambio de velocidad que tiene que hacer el satélite para pasar de la órbita circular a a la órbita de transferencia elíptica y también determine cuál debe de ser el cambio de velocidad de la órbita elíptica a la órbita circular de radio b. Determine cuál es el tiempo que tarda esta maniobra de cambio de órbita.