Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General
Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2023-2

Instrucciones:

- **Tiene 3 horas para para entregar su examen a partir de la hora de inicio. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos antes de la hora límite. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus iniciales comenzando por su nombre, seguidas de su fecha de nacimiento en 8 dígitos (e.g. MAHV19760313). Los exámenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles no serán calificados.**

1. Método de Euler. (20 puntos). Considere la solución numérica mediante el método de Euler del sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, con condiciones iniciales $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ y donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz constante, real y simétrica.

(a) Sea $\mathbf{e}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}(jh)$, $j = 0, 1, \ldots$. Demuestre que

$$\|\mathbf{e}\|_2 \leq \|\mathbf{y}_0\|_2 \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} \left|(1 + h\lambda)^j - e^{jh\lambda}\right|,$$

donde $\sigma(\mathbf{A})$ es el conjunto de los valores propios de $\mathbf{A}$ y $\|\cdot\|_2$ es la norma Euclideana $\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^\top\mathbf{x})^{1/2}$.

(b) Demuestre que para todo $-1 \ll x \leq 0$ y $j = 0, 1, \ldots$, se cumple que

$$e^{jx} - \tfrac{1}{2}jx^2 e^{(j-1)x} \leq (1 + x)^j \leq e^{jx}.$$

(*Sugerencia:* Pruebe primero que $1 + x \leq e^x$ y $1 + x + \frac{1}{2}x^2 \geq e^x$ para todo $x \leq 0$. Después argumente que, si $|a - 1|$ y $|b|$ son suficientemente pequeños, entonces $(a - b)^j \geq a^j - ja^{j-1}b$ para $j = 0, 1, \ldots$.)

(c) Suponga que el valor propio máximo de $\mathbf{A}$ es $\lambda_{\max} < 0$. Demuestre que

$$\|\mathbf{e}_j\|_2 \leq \tfrac{1}{2}t\lambda_{\max}^2 e^{t\lambda_{\max}}\|\mathbf{y}_0\|_2 h \leq \tfrac{1}{2}t_*\lambda_{\max}^2\|\mathbf{y}_0\|_2 h,$$

cuando $h \to 0$ y simultáneamente $jh \to t \in [0, t_*]$, $t_* > 0$ fijo.

(d) Calcule el orden de magnitud de la cota del inciso (c) para el caso

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad t_* = 10.$$

2. Métodos multipaso. (20 puntos). Sea $\mathbf{y}(t)$ la única solución de la ecuación

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

donde $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ es dado y $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ es, además, Lipchitz continua en la variable $\mathbf{y}$. Un método general de s pasos tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{s} a_k \mathbf{y}_{k+j} = h\sum_{k=0}^{s} b_k f(t_{k+j}, \mathbf{y}_{k+j}), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

donde a_k, b_k, para $k = 0, 1, \ldots, s$ son constantes dadas, independientes de h y de j. (Nota: Usualmente se normaliza el método con $a_s \equiv 1$. Si $b_s = 0$ el método es *explícito*; en otro caso, *implícito.)* El método se puede caracterizar mediante los polinomios:

$$\rho(w) := \sum_{k=0}^{s} a_k w^k, \qquad \sigma(w) := \sum_{k=0}^{s} b_k w^k.$$

(a) Sea $\eta(z,w) := \rho(w) - z\sigma(w)$. Demuestra que el método es de orden p si y sólo si

$$\eta(z, e^z) = cz^{p+1} + O(z^{p+2}),$$

cuando $z \to 0$, para cierta constante $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(b) Suponiendo que $(\partial\eta/\partial w)_{|(0,1)} \neq 0$, pruebe que existe una vecindad del origen $z = 0$ y una función real analítica $w_1(z)$ tal que $\eta(z, w_1(z)) = 0$ para z en dicha vecindad y tal que

$$w_1(z) = e^z - c\Big(\frac{\partial\eta}{\partial w}(0,1)\Big)^{-1} z^{p+1} + O(z^{p+2}), \qquad z \to 0. \tag{1}$$

(c) Demuestre que si (1) se cumple entonces el método es convergente. (*Sugerencia:* Exprese $(\partial\eta/\partial w)_{|(0,1)} \neq 0$ en términos del polinomio ρ.)

3. Métodos de Runge-Kutta (20 puntos).

(a) Restringiéndonos a ecuaciones escalares autónomas de la forma $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, demuestra que el método de Runge-Kutta explícito que está asociado a la tabla

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

es de orden cuatro.

(b) Determina todos las posibles $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{A}$ tales que el método implícito de Runge-Kutta de *dos* pasos asociado a la tabla

$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{c} & \mathbf{A} \\
\hline
 & \mathbf{b}^\top
\end{array}$$

es de orden $p \geq 3$.

4. Métodos predictor-corrector (20 puntos). Considera una función $f = f(t,y)$ lo suficientemente diferenciable en su dominio. Realiza lo siguiente:

(a) Demuestra que el método explícito de cuatro pasos

$$y_{j+1} - y_{j-3} = \frac{4}{3}h\left(2f(t_j, y_j) - f(t_{j-1}, y_{j-1}) + 2f(t_{j-2}, y_{j-2})\right),$$

tiene un error local de truncamiento dominado por $\frac{14}{45}y_j^{(5)}$.

(b) la fórmula del inciso (a) suele utilizarse como un predictor para el corrector dado por la regla de Simpson

$$y_{j+1} = y_{j-1} + h\left(\frac{1}{3}f(t_{j+1}, y_{j+1}) + \frac{4}{3}f(t_j, y_j) + \frac{1}{3}f(t_{j-1}, y_{j-1})\right).$$

Demuestra que el corrector convergerá si $\frac{1}{3}h|\frac{\partial f}{\partial y}| < 1$.

5. Problemas rígidos (stiff) (20 puntos).

(a) Deduce el método BDF (*Backward Differentiation Formula*) de orden 2:

$$y_{j+2} - \frac{4}{3}y_{j+1} + \frac{1}{3}y_j = \frac{2}{3}hf(t_{j+2}, y_{j+2}),$$

(b) Demuestra que la región de estabilidad absoluta de este método contiene al eje real negativo:

$$-\infty < h\lambda < 0.$$