Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica (2020-II)
15 a 24 de febrero de 2021

Nombre:____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7. Duración máxima: 4 horas.

1. Sean $\mathbb{S}^n$ la esfera de dimensión n y $\mathbb{RP}^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n. Probar

   (a) $\pi_1(\mathbb{S}^n, *) \cong \{e\}$ si $n > 1$.

   (b) $\pi_1(\mathbb{RP}^n, *) \cong \mathbb{Z}_2$ si $n > 1$.

   (c) $\pi_q(\mathbb{S}^n, *) \cong \pi_q(\mathbb{RP}^n, *)$ si $q > 1$.

2. Sea $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$, $\alpha \in \Lambda$, una familia de espacios topológicos basados (punteados), y considérese el producto topológico $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, con punto básico $*$ dado por los puntos básicos $x_\alpha \in X_\alpha$. Probar que las proyecciones $p_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ inducen un isomorfismo $\pi_q(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, *) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} \pi_q(X_\alpha, x_\alpha)$.

3. Sea $\mathbb{CP}^n$ el espacio proyectivo complejo de dimensión n. Probar

$$H_q(\mathbb{CP}; R) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ es impar} \\ R & \text{si } q \text{ es par y } 0 \leq q \leq 2n. \end{cases}$$

4. Considérese la cuña de esferas $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$. Calcular sus R-módulos de homología reducida $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1; R)$.

5. Calcular la característica de Euler $\chi(\mathbb{RP}^n)$ si $n \geq 0$.

¡Mucha suerte!