Examen General de Topología Diferencial

Semestre 2020-I

Salón S-102 del Departamento de Matemáticas, de 9:00 a 13:00 hrs.
del día viernes 17 de enero de 2020

Lea cuidadosamente todos los ejercicios antes de comenzar. Justifique debidamente cada afirmación que use. Resuelva 4 ejercicios. Los marcados con (∗) son obligatorios. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima para aprobar el examen es 6.

*1 (a) Dé un encaje de $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_k}$ a $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$ y demuestre que no existe una inmersión a $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k}$.

(b) Sea $X = M(n, m, \mathbb{R})$ el espacio de las matrices de $n \times m$ con coeficientes reales.

i. Demuestre que $M(n, m, r) = \{A \in X \mid rango(A) = r\}$ es una subvariedad de X y calcule su dimensión.

ii. Demuestre que $\overline{M(n, m, r)} = \bigcup_{j=0}^{r} M(n, m, j)$.

2 (a) Sea M^k una $k-$subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existe un homeomorfismo de haces entre TM^k y el conjunto

$$\{(x, v) \in M^k \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_xM^k \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

(b) Demuestre que TS^1 es un $1-$haz trivial.

*3 (a) Sean M^n y N^m variedades conexas sin frontera, no vacías y que no son un punto. Demuestre que si $M^n \times N^m$ es orientable, entonces M^n y N^m también lo son.

(b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & c \\ c & 2 \end{pmatrix}$$

con $c = \frac{\sqrt{57}}{2}$. Pruebe que

$$M = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v^t A v = 4\}$$

es subvariedad de $\mathbb{R}^2$ y calcule el $T_{(1,0)}M$.

4 (a) Sea $M^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una $k-$variedad compacta y $n \geq 2k+1$. Pruebe que existe H hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que, si $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \to H$ es la proyección canónica, entonces Π restringida a M^k es un encaje.

(b) Sea M^n una $n-$variedad compacta, con $n \geq 2$. Demuestre que existe $\alpha : \mathbb{R} \to M^n$ una inmersión inyectiva la cual no es solución de ningún campo X en M^n.

5 (a) Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función suave y para cada $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ defina

$$f_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{j=1}^{N} a_j x_j.$$

Demuestre que, excepto por un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^N$, $f_{\bar{a}}$ es una función de Morse.

(b) Suponga que $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es una función suave, $n > 1$, $K \subset \mathbb{R}^k$ compacto y $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ una función suave tal que dg_x nunca se anula, pero que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in K$. Demuestre que este resultado es falso para $n = 1$.

*6 (a) Sea $p(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ y suponga que existe $r > 0$ tal que

$$r^m > |a_{m-1}|\, r^{m-1} + \cdots + |a_1|\, r + |a_0|\,.$$

Demuestre que el polinomio p tiene un cero en el disco $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. ¿Podría decir cuántos ceros hay en D_r, contando multiplicidades?

(b) Sea $f(z) = z^{2k+1} + h(z)$ función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ con

$$\lim_{z \to \infty} \frac{h(z)}{z^{2k+1}} = 0$$

Demuestre que existe $R > 0$ tal que si $|z| \geq R$, entonces $f(z) \neq 0$. Calcule el grado de f en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$.