Examen General de Topología Diferencial

Este examen tiene 6 preguntas cada una de ellas vale 20 puntos. Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 80 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

1. (20 puntos) Sea M una variedad diferenciable y $\varphi : M \to M$ una involución libre, es decir, φ es un difeomorfismo tal que $\varphi \circ \varphi = Id_M$ y $\varphi(x) \neq x$ para toda $x \in M$.

   Demuestre que el espacio cociente M/φ, donde $x \in M$ se identifica con $\varphi(x)$, es una variedad topológica tal que acepta una única estructura diferenciable con la propiedad de que la proyección $M \to M/\varphi$ es un difeomorfismo local.

2. (20 puntos) Sea S^n la esfera de dimensión n. Demuestre que para todo $n \geq 0$ existe un difeomorfismo
$$(T\ S^n) \times\ \mathbb{R}\ \cong\ S^n\ \times\ \mathbb{R}^{n+1}$$
   Sugerencia: Observe que, para $x \in S^n$, $T_xS^n \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ naturalmente.

3. (20 puntos) Demuestre que:

   (a) Si f y g son inmersiones, entonces $f\ \times\ g$ también.

   (b) Si f y g son inmersiones, entonces $f\ \circ\ g$ también.

   (c) Si $f : M \to N$ es encaje, entonces $Tf : TM \to TN$ también.

4. (20 puntos) Sean $f : M \to N$ y $g : N \to Z$ transformaciones suaves entre variedades. Suponga que g es transveral a una subvariedad W de Z. Demuestre que f es transversal a $g^{-1}(W)$ si y solamente si $g \circ f$ es transversal a W

5. (20 puntos) Sea $f : M \to M$ un mapeo suave con un punto fijo x. Esto es: $f(x) = x$. Si $+1$ no es un valor propio de $df_x : T_xM \to T_xM$, entonces x se dice que es un punto fijo Lefschetz de f. El mapeo f se llama mapeo de Lefschetz si todos sus puntos fijos son Lefschetz. Demuestre que para M compacta y f Lefschetz, entonces f tiene a lo más un número finito de puntos fijos.

6. (20 puntos) Sean M y N variedades compactas, orientadas y sin frontera de dimensión n. Suponga que N es conexa. Demuestre que el grado de un mapeo $f : M \to N$ es igual al número de intersección de la gráfica de f con $M \times \{y\}$ en $M \times N$, para toda $y \in N$.