Examen General de Topología Diferencial

Semestre 2021-I

Lea cuidadosamente todos los ejercicios antes de comenzar. Justifique debidamente cada afirmación que use. Resuelva sólo 4 ejercicios. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima para aprobar el examen es 6.

1. (a) Dé un encaje de $S^{n_1} \times S^{n_2}$ a $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$ y demuestre que no existe una inmersión de a $S^{n_1} \times S^{n_2}$ a $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

   (b) Sea (E^n, Π, X) un haz vectorial con X conexo. Sea $f : E^n \to E^n$ un homeomorfismo de haces tal que $f \circ f = f$. Demuestre que f tiene rango constante.

2. (a) Sean M^n y N^m variedades conexas sin frontera. Demuestre que $M^n \times N^m$ es orientable si y sólo si M^n y N^m son orientables.

   (b) Sea $\bar{f} : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germen diferenciable con $\bar{f}(0) = D\bar{f}(0) = \cdots = D^{k-1}\bar{f}(0) = 0$ y $D^k\bar{f}(0) \neq 0$. Demuestre que:

      i. Si k es impar, existe $\bar{h} : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germen de difeomorfismo tal que:
      $$\bar{f} \circ \bar{h} = \bar{x}^k.$$

      ii. Si k es par, tenemos dos casos:

         1) si $D^k\bar{f}(0) > 0$, existe $\bar{h}_1 : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germen de difeomorfismo tal que:
         $$\bar{f} \circ \bar{h}_1 = \bar{x}^k$$

         2) si $D^k\bar{f}(0) < 0$, existe $\bar{h}_2 : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germen de difeomorfismo tal que:
         $$\bar{f} \circ \bar{h}_2 = -\bar{x}^k.$$

3. (a) Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2m$. Demuestre que dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineal, con $\|\alpha\| < \varepsilon$, tal que $f + \alpha$ es inmersión.

   (b) Sea p de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida como $p(z) = z^{2m+1} + \mathrm{sen}(|z|^2)q(z)$, con $q(z)$ polinomio de grado menor o igual a $2m$. Demuestre que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

4. (a) Sea $M(n, n, \mathbb{R})$ el espacio de las matrices cuadradas con entradas reales y $Sim(n, n, \mathbb{R})$ el subespacio de las matrices simétricas. Considere
   $$f : M(n, n, \mathbb{R}) \to Sim(n, n, \mathbb{R})$$
   dada por $f(A) = AA^t$. Demuestre que:

      i. $Df(A)(B) = A^tB + B^tA = A^tB + (A^tB)^t$

ii. Concluya que el conjunto $\{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid AA^t = Id\}$ es una subvariedad compacta de $M(n, n, \mathbb{R})$ y calcule su dimensión.

(b) Sea $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

Demuestre que f es una inmersión inyectiva pero que no es un encaje.

5. (a) Sea $f : S^1 \to S^1$ suave. Demuestre que f se puede extender a D^2, el disco unitario cerrado, si y sólo si $grad(f) = 0$.

(b) Demuestre que S^2 y $S^1 \times S^1$ no son difeormorfos.