Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas (de 10:00 a 14:00 hrs).
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 13. Para aprobar el examen necesitas obtener al menos 8 puntos.

Preguntas:

1. **(2 puntos)** Sean X un espacio topológico, $B \subset X$ un subconjunto cerrado y $C \subset X$ un subconjunto arbitrario. Demuestra que
$$\text{int}(B \cup C) = \text{int}(B \cup \text{int }(C)).$$

2. **(1 punto)** Falso o Verdadero. La recta de Sorgenfrey es un espacio localmente compacto. Justifica tu respuesta.

   Recuerda que la recta de Sorgenfrey es el espacio $(\mathbb{R}, \sigma)$ donde σ es la topología en $\mathbb{R}$ generada por la base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$.

3. **(2 puntos)** Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Demuestra que si $f(x) = f(f(x))$ para todo $x \in X$, entonces f es cociente.

4. **(2 puntos)** Demuestra que un espacio topológico X es de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$, respecto a la topología producto.

5. Sea τ_0 la topología euclideana en $\mathbb{R}$. Definimos una nueva topología en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:
$$\tau_1 = \{U \cup V : U \in \tau_0, V \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
   (a) **(1 punto)** Demuestra que τ_1 es una topología en $\mathbb{R}$.

   (b) **(1.5 puntos)** Describe cuáles son las componentes conexas de $(\mathbb{R}, \tau_1)$ y cuáles de ellas son abiertas (en τ_1).

   (c) **(1.5 puntos)** Demuestra que $(\mathbb{R}, \tau_1)$ es un espacio normal. Recuerda que un espacio (X, τ) es normal, si para cualesquiera dos cerrados ajenos $A, B \subset X$ existen dos abiertos ajenos $U, V \subset X$, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

6. **(2 puntos)** Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, localmente compacto y segundo numerable. Demuestra que la compactación por un punto de X es segundo numerable.

   Recuerda que X es $T_{3\frac{1}{2}}$ si es T_1 y para cualquier subconjunto cerrado y no vacío $A \subset X$ y cualquier punto $x \in X \setminus A$, existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = \{1\}$.