Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas (de 10:00 a 14:00 hrs).
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 21. Para aprobar el examen necesitas obtener al menos 14 puntos.

Preguntas:

1. (a) **(0.5 puntos)** Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, demuestra que existe una única topología τ_f en X tal que el conjunto

$$\{A \subset X \mid f(A) \subset A\}$$

es la familia de subconjuntos cerrados de (X, τ_f).

   (b) **(0.5 puntos)** Los espacios (X, τ_f) del inciso anterior se conocen como *espacios funcionales de Alexandroff*. Demuestra que en (X, τ_f) la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

   (c) **(2 puntos)** Si X es un conjunto arbitrario demuestra que existe una única función $f : X \to X$ tal que τ_f es la toplogía discreta.

2. **(2 puntos)** Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, donde Y es Hausdorff, y sea $D \subset X$ un denso. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $f = g$.

3. **(3 puntos)** Sean $X = \mathbb{N} \times [0, 1)$ con la topología relativa del plano y $A = \mathbb{N} \times \{0\}$. Demuestra que el espacio cociente X/A no es primero numerable.

4. Sea (X, τ) un espacio cero-dimensional (es decir, cada punto tiene una base local de subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez).

   (a) **(1 punto)** Demuestra que X es completamente regular.

   (b) **(1 punto)** Si además X es T_0, demuestra que X es totalmente disconexo.

   (c) **(2 puntos)** Da un ejemplo de un espacio cero-dimensional que no sea normal.

5. **(3 puntos)** Sea $A \times B$ un compacto en $X \times Y$ con la topología producto y sea $U \subset X \times Y$ abierto tal que $A \times B \subset U$. Demuestra que existen V abierto de X y W abierto de Y tales que $A \times B \subset V \times W \subset U$.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea X_n un espacio métrico tal que su métrica d_n está acotada por 1. En el espacio producto $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definimos una métrica D dada por

$$D(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{n}$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

   (a) **(1 punto)** Demuestra que D es una métrica en X.

   (b) **(2 puntos)** Demuestra que D genera la topología producto en X.

   (c) **(3 puntos)** Demuestra que si d_n es totalmente acotada para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces D es totalmente acotada.

   Recuerda que un espacio métrico (Y, ρ) es totalmente acotado si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de puntos $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tal que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \varepsilon),$$

   donde $B(y_i, \varepsilon) = \{x \in Y \mid \rho(x, y_i) < \varepsilon\}$.