Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas (de 10:00 a 14:00 hrs).
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 16. Para aprobar el examen necesitas obtener al menos 11 puntos.

Preguntas:

1. Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ con τ la topología conumerable de $\mathbb{R}$ (es decir, dado $U \subset \mathbb{R}$, $U \in \tau$ si y sólo si $U = \emptyset$ o $\mathbb{R} \setminus U$ es numerable). ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos? Justifica tu respuesta.
   (a) **(1 punto)** $(\mathbb{R}, \tau)$ es Lindelöf.
   (b) **(1 punto)** $(\mathbb{R}, \tau)$ es secuencialmente compacto.
   (c) **(1 punto)** $(\mathbb{R}, \tau)$ es conexo.
   (d) **(1 punto)** $(\mathbb{R}, \tau)$ es primero numerable.

   Recuerda que un espacio es secuencialmente compacto si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

2. **(2 puntos)** Sea X un espacio topológico y $U \subset X$. Demuestra que U es abierto si y sólo si para todo $A \subset X$ se tiene que $\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A}$.

3. **(1 punto)** Sea X un espacio compacto Hausdorff. Definimos una relación de equivalencia R en $X \times X$ de la siguiente manera: xRy si y sólo si para cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ existe $z \in X$ tal que $f(z) = 1/2$. Demuestra que las clases de equivalencia son las componentes de X.

4. **(3 puntos)** Sea X un espacio regular. Supongamos que X se puede escribir como la unión de una familia localmente finita de subespacios cerrados y localmente compactos. Demuestra que X es localmente compacto.

5. Sea E una relación de equivalencia en un espacio topológico X y $\pi : X \to X/E$ la función cociente sobre el espacio cociente definido por E.
   (a) **(1 punto)** Demuestra que si X/E es un espacio Hausdorff, entonces E es un subconjunto cerrado del producto $X \times X$.

(b) **(1 punto)** Demuestra que si E es un subconjunto cerrado del producto $X \times X$ y π es abierta, entonces X/E es un espacio Hausdorff

6. Sean (X, ρ) y (Y, σ) espacios métricos, y $f : X \to Y$ una función continua. Para cualesquiera $x, y \in X$ se define

$$D(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(f(x), f(y)).$$

(a) **(1 punto)** Demuestra que D es una métrica.

(b) **(2 puntos)** Demuestra que D es equivalente a ρ, es decir, que generan la misma topología.

(c) **(1 punto)** Demuestra que f es uniformemente continua con respecto a las métricas D y σ.