Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas (de 10:00 a 14:00 hrs).
- El examen consta de 7 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 16. Para aprobar el examen necesitas obtener al menos 11 puntos.

Preguntas:

1. **(1 punto)** Demuestra que si X es Lindelöf, entonces todo subconjunto no numerable tiene un punto de acumulación.
2. **(2 puntos)** Sea X un espacio de Hausdorff donde el conjunto de puntos que no son aislados es finito. Demuestra que X es normal.
3. **(2 puntos)** Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones realvaluadas definidas en X, todas de ellas semicontinuas inferiormente y para cada $x \in X$ existe
$$F(x) = \sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\},$$
entonces $F : X \to \mathbb{R}$ también es una función semicontinua inferiormente.

   Recuerda que una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}[(r, \infty)]$ es abierto.
4. **(2 puntos)** Para un espacio topológico X definimos el cono sobre X como el espacio TX cociente de $X \times [0, 1]$ cuando identificamos todos los puntos de la forma $(x, 1)$ para $x \in X$. Sea $i : T(0, 1) \to T[0, 1]$ la función dada por $i([x, t]) = ([x, t])$ para $x \in (0, 1)$ y $t \in [0, 1]$. ¿Es i un encaje? Justifica tu respuesta.
5. Sea (X, ρ) un espacio métrico.
   (a) **(2 puntos)** Demuestra que si X es conexo, entonces para todo $\epsilon > 0$ y para cualesquiera $x, y \in X$ existe una sucesión finita $x_0, x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que $x_0 = x$, $x_k = y$ y $\rho(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ para todo $i < k$.
   (b) **(1 punto)** Demuestra que si X es compacto entonces la implicación inversa del inciso anterior se cumple.
6. Sea Y un espacio Hausdorff, $f : X \to Y$ una función y $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ su gráfica.

(a) **(1 punto)** Demuestra que si f es continua, entonces G es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

(b) **(2 puntos)** Demuestra que si Y es compacto entonces la proyección $\pi_X : X \times Y \to X$ es una función cerrada.

(c) **(2 puntos)** Demuestra que si Y es compacto y G es un subconjunto cerrado de $X \times Y$, entonces f es una función continua.

(d) **(1 punto)** Encuentra un ejemplo de una función f que no es continua pero G es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.