EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL
2022-1

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones: Este examen tiene 6 preguntas, cada una de ellas vale 20 puntos. Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 80 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

Ejercicio 1. Considere las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales, denotadas por $M(n, \mathbb{R})$ y sea $\mathrm{Sim}(n, \mathbb{R})$ las matrices simétricas y $f : M(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sim}(n, \mathbb{R})$ dada por $f(A) = A^{tr}A$.

a) Demuestre que $D_B f(A) = A^{tr}B + B^{tr}A$ y que es un epimorfismo si $A^{-1} = A^{tr}$ (Sugerencia: utilice la definición de la derivada direccional sumando hB con $h \to 0$).

b) Concluya que $\{A \in M(n, \mathbb{R}) : A^{tr}A = Id\}$ es una subvariedad compacta y calcule su dimensión.

Ejercicio 2. a) Sea S^1 el círculo unitario en el plano complejo. Demuestre que la función $S^1 \to S^1$ definida por $z \longmapsto (\bar{z})^m$, tiene grado $-m$ (donde $\bar{z}$ denota el conjugado de $z \in S^1$).

b) Utilice la fórmula de Lefschetz ($L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$) para demostrar que la caracterísca de Euler de la esfera S^2 satisface $\chi(S^2) = 2$.

Ejercicio 3. Una función $f : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = (2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2.$$

a) Muestre que 1 es un valor regular de f. Denote por $M = f^{-1}(1)$.

b) Muestre que M con la superficie

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$$

es transversal. Identifique la variedad $M \cap N$.

Ejercicio 4. Sea (E, π, X) un n-haz vectorial diferenciable, con X conexo. Sea $f : E \to E$ un homomorfismo diferenciable de haces con $f \circ f = f$. Pruebe que el rango f_x es constante r para todo $x \in X$.

Ejercicio 5. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con frontera.

a) Demuestre que la frontera ∂M es una variedad diferenciable (sin frontera) de dimensión $(n - 1)$.

b) Demuestre que si M es orientable, una orientación de M induce una orientación sobre ∂M.

Ejercicio 6. Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 y $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la función

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)\,.$$

Pruebe que la función inducida en el cociente $\mathbb{R}P^2$ está bien definida, es decir f induce una función $g : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$, tal que

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^4 \\ \mathbb{R}P^2 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ es la función cociente. Demuestre que g es un encaje del proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}^4$.