Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2022-1

Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 7 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 17. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 11 puntos. Para recibir mención es necesario obtener al menos 15.5 puntos.

Preguntas:

1. **(3 puntos)** Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos con $J \neq \emptyset$. Demuéstrese que si el espacio $\prod_{j\in J} X_j$ es metrizable, entonces cada factor X_j es metrizable y J es a lo más numerable.

2. **(2.5 puntos)** Sean τ_1 y τ_1 topologías para X tales que (X, τ_1) y (X, τ_2) son espacios $T_{3\frac{1}{2}}$. Además, para $i \in \{1, 2\}$ sea $C_i(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : (X, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_{usual})$. Demuestra que si $C_1(X, \mathbb{R}) = C_2(X, \mathbb{R})$, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

3. **(3.5 puntos)** Sean (X, τ) un espacio compacto T_2 y $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ una función continua. Demuestra que existe $K \subseteq X$ cerrado y no vacío tal que $K = f[K]$ (Sugerencia: define recursivamente $X = K_1$ y $K_{n+1} = f[K_n]$ para cada $n \geq 1$).

4. **(2 puntos)** Falso o verdadero con argumento: si un espacio (X, τ) es disconexo, entonces es homeomorfo a la suma topológica de sus componentes conexas.

5. **(1 punto)** Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos con $J \neq \emptyset$. Sea $\emptyset \neq L \subsetneq J$. Denotamos por $\pi : \prod_{k\in J} X_k \to \prod_{k\in L} X_k$ a la función dada por $\pi(g) = g \restriction_L$. Determine si la función π es continua y si es abierta.

6. **(4 puntos)** En $\mathbb{R}^2$ definimos la siguiente relación de equivalencia: $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a + b^2 = c + d^2$. Determina cuál es el espacio cociente dado por $X/_R$. Argumenta tus afirmaciones.

7. **(1 punto)** Dados un espacio (X, τ) y $A \subseteq X$, el símbolo A' denotará al conjunto de puntos de acumulación de A en X.

   Sea J un conjunto finito y sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in J$ sea $U_i \subseteq X_i$. Falso o verdadero con argumento:

$$\Big(\prod_{i\in J} U_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i\in J} U_i\Big)' = \prod_{i\in J} (U_i \setminus U_i').$$

Nota. La suma topológica de una familia de espacios topológicos ajenos por pares $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ es el espacio $\oplus_{i\in I}(X_i, \tau_i) = (\bigcup_{i\in I} X_i, \tau_\oplus)$, cuya topología está dada por

$$\tau_\oplus := \{W \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i : W \cap X_i \in \tau_i \text{ para cada } i \in I\}.$$