EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL
2024-1

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones:

1. *Este examen tiene 6 problemas, cada uno de ellos vale 20 puntos.*
2. *Los problemas marcados con (*) son obligatorios.*
3. *Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 80 puntos (90 puntos o más es aprobado con mención honorífica).*
4. *El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.*
5. *Justifique claramente sus respuestas.*

(*) Problema 1. Una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ se define mediante

$$(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } (y_0, ..., y_n) = (\lambda x_0, ..., \lambda x_n).$$

El espacio cociente $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} - 0)/\sim$ se llama el espacio proyectivo real.

a) Demuestre que $\mathbb{R}P^n$ es de Hausdorff y segundo contable.

b) Construya un atlas para $\mathbb{R}P^n$ donde los cambios de coordenadas son funciones suaves.

Problema 2. Demuestre que el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{gathered}$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.

(*) Problema 3.

a) Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una sucesión de transformaciones suaves entre variedades, y suponga que g es transversal a una subvariedad W de Z. Muestre que f es transversal a $g^{-1}(W)$ si y sólo si $g \circ f$ es transversal a W.

b) ¿Para cuáles valores de a ocurre que el hiperboloide definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a$ tienen intersección transversal? ¿Cómo se ve la intersección para diversos valores de a?

Problema 4. Sean M y N variedades suaves de dimensión n. Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

a) Sea $f : M \to N$ función suave tal que para $p \in M$ se tiene que df_p es un isomorfismo lineal, entonces f es un difeomorfismo local en p.

b) Sea $f : M \to N$ función suave tal que para $p \in M$ se tiene que df_p es un isomorfismo lineal, entonces existen parametrizaciones locales (U, ϕ) de $p \in M$ y (U, ψ) de $f(p)$ con el mismo dominio abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\text{identidad}"'] & U \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}.$$

Problema 5. Demuestre que una función $f : S^1 \to S^1$ se extiende al disco $B = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1\}$ si y sólo si $\deg(f) = 0$.

Problema 6. Sean M y N conexas sin fronteras. Demuestre que $M \times N$ es orientable si y sólo si M y N lo son.