Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2023-2

Instrucciones

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 11. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 6.5 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 10 puntos.

Preguntas:

1. (**2 puntos**) Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es *débilmente continua en un punto* $x \in X$ si y solo si siempre que $f(x) \in V \in \tau_Y$, existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset \overline{V}^Y$. La función f es *débilmente continua* si y solo si es débilmente continua en cada punto $x \in X$. Decimos que f es *frágilmente continua* si y solo si para cada $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(\mathrm{Fr}_Y(V))$ es cerrado en X.

   a) Demuestre que f es débilmente continua si y solo si para cada $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) \subset \mathrm{int}_X(f^{-1}(\overline{V}^Y))$.

   b) Demuestre que f es continua si y solo si es ambos débilmente y frágilmente continua.

2. **(2 puntos)** Sean X_1 un conjunto no numerable y X_2 cualquier conjunto infinito. Suponga que X_1 y X_2 tienen las topologías discretas y sean $X_1^* = X_1 \cup \{\infty_1\}$ y $X_2^* = X_2 \cup \{\infty_2\}$ las correspondientes compactaciones por un punto. Demuestre que $X_1^* \times X_2^*$ es normal, pero $(X_1^* \times X_2^*) - \{(\infty_1, \infty_2)\}$ no lo es. (**Nota:** Dado un espacio topológico X, la *compactación por un punto de* X, denotada por X^*, se obtiene al agregar un punto ∞, $X^* = X \cup \{\infty\}$, y definiendo los conjuntos abiertos del nuevo espacio como los conjuntos abiertos de X junto con los conjuntos de la forma $U \cup \{\infty\}$, en donde U es un conjunto abierto de X tal que $X - U$ es cerrado y compacto. Puede usar en este ejercicio, sin demostrar, que los espacios resultantes X_1^* y X_2^* son compactos y Hausdorff.)

3. **(1.5 puntos)** Sea X un espacio localmente conexo tal que $X = A \cup B$ donde A y B son cerrados y $A \cap B$ es localmente conexo. Demuestre que ambos A y B son localmente conexos.

4. **(1.5 puntos)** Sea $q : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Demuestra que si q es una función abierta, entonces la topología de Y es la topología cociente generada por q.

5. **(2 puntos)** Sean X un espacio topológico y A un subconjunto no numerable de X. Demuestre que si X es compacto, entonces existe un punto $x \in X$ tal que para cada vecindad V de x, $V \cap A$ es no numerable.

6. **(2 puntos)** Para cada $t \in [0,1]$, sea $I_t = \{0,1\}$ con la topología discreta y sea $X = \prod_{t\in[0,1]} I_t$. Demuestre que X no es metrizable.