Examen General de Topología Algebraica

Este es un examen de 100 puntos. Para aprobar el examen se requiere un mínimo de 75 puntos; y para obtener mención en el examen, un mínimo de 90 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

¡Éxito!

1. (20 pts) Suponga que $f_t \colon X \to X$ es una homotopía tales que f_0 y f_1 son la función identidad. Muestre que para cualquier $x_0 \in X$, el lazo $t \mapsto f_t(x_0)$ representa un elemento en el centro de $\pi_1(X, x_0)$.

2. (20 pts) Sea X la suma conexa de dos toros de dimensión 2. Calcule lo siguiente: $\pi_1(X, x_0)$ para cualquier $x_0 \in X$, $\chi(X)$ y $H_n(X; \mathbb{Z})$ para todo $n \geq 0$.

3. (20 pts) Demuestre que una función $f \colon S^n \to S^n$ de grado distinto de cero es suprayectiva. Además construya funciones suprayectivas $g \colon S^n \to S^n$ de grado cero. ¿Hay alguna contradicción entre estos dos enunciados?

4. (20 pts) Demuestre que si X is arco-conexo y localmente arco-conexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \to S^1$ es homotópica a una función constante.

5. (20 pts) Exhiba dos complejos CW finitos y conexos X y Y tales que tienen la misma característica de Euler, tienen grupos fundamentales isomorfos y que no sean homotópicamente equivalentes.