EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL 2021-2

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Instrucciones: Este examen tiene 6 preguntas, cada una de ellas vale 20 puntos. Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 80 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

(1) a) Demuestre que si f y g son inmersiones, entonces $f \times g$ también es una inmersión.

b) Sean M, N variedades diferenciables, demuestre que si $f : M \to N$ es un encaje, entonces $Tf : TM \to TN$ también lo es.

(2) a) Describa un atlas en S^2, con cartas difeomorfas al plano $\mathbf{R^2}$.
b) Describa un atlas en el toro $T^2 = S^1 \times S^1$ con tres cartas difeomorfas a $\mathbf{R^2}$.

(3) Sea $M(n, \mathbf{R})$, las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales, y sea $Sim(n, \mathbf{R})$ las matrices simétricas $n \times n$. Considere la función

$$f : M(n, \mathbf{R}) \to Sim(n, \mathbf{R}) \text{ dada por } \quad f(A) = A^{tr} A.$$

a) Pruebe que la matriz identidad $Id = Id_{n \times n}$ es un valor regular de f.
b) Demuestre que $O(n, \mathbf{R}) = \{A \in M(n, \mathbf{R}) : \ A^{tr} A = Id\}$ es una subvariedad de $M(n, \mathbf{R})$ y calcule su dimensión.

(4) Sean M, N una pareja de variedades diferenciables sin frontera. Demuestre que si $M \times N$ es orientable, entoces ambas M y N son orientables.

(5) a) Demuestre que el haz tangente TS^1 es un 1-haz trivial, es decir, es isomorfo a $S^1 \times \mathbf{R}$.

b) Demuestre que el haz TS^2 no es trivial.

(6) a) Sean N_1, N_2 subvariedades compactas, ajenas y sin frontera de la variedad diferenciable M. Demuestre que existen vecindades tubulares $T_i(N_i)$ ajenas.

b) Sea $f : S^n \to S^n$ la función $f(x) = -x$. Demuestre que existe una homotopía diferenciable de f a la identidad si y solo si n es impar.