Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 5 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 12. Para aprobar el examen necesitas obtener al menos 8.5 puntos.
- Para recibir mención en este examen es necesario obtener 11 puntos.

Preguntas:

1. **(1 punto)** Sean X un espacio topológico y $U \subseteq X$. Prueba que $fr\big(fr(fr(U))\big) = fr\big(fr(U)\big)$.

2. Para cada $j \in \{1, -1\}$ considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$: $Y_j = \{(j, y)\colon -3 \leq y \leq 3\}$. Sea $X = Y_1 \cup Y_{-1}$. Para cada $r > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ se considera $M_r(y) = \big(\mathbb{R} \times (y - r, y + r)\big) \cap X$. Además, se toma la familia:
$$\mathcal{B}(x,y) = \begin{cases} \{M_r(y) \setminus \{(-1,y)\} : r > 0\}, & \text{si} \quad (x,y) \in Y_1; \\ \{\{(x,y)\}\}, & \text{si} \quad (x,y) \in Y_{-1}. \end{cases}$$
Sea $\mathcal{B} = \bigcup\{B(x,y) : (x,y) \in X\}$. Supón que $\mathcal{B}$ es una base para X (no es necesario probarlo) y que τ es la topología generada por esa base.
   (a) Determina si (X, τ) es:
      I. **(1 punto)** compacto,
      II. **(½ punto)** primero numerable,
      III. **(½ punto)** segundo numerable,
      IV. **(½ punto)** separable, y
      V. **(½ punto)** conexo.
   (b) **(1 punto)** Encuentra $\max\{i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}\colon X \text{ es } T_i\}$. Argumenta.
   (c) **(½ punto)** ¿Es X metrizable? Argumenta.

3. **(1 punto)** Definición: un espacio es hereditariamente disconexo si es no vacío y todas sus componentes conexas son de un solo punto.

   Falso o Verdadero con argumento: Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia (probablemente infinita) de espacios hereditariamente disconexos. Entonces el producto $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ equipado con la topología producto es hereditariamente disconexo.

4. **(3 puntos)** Sea Y compacto y $f\colon X \to Y$ una función continua y cerrada. Demuestra que si para todo $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es un compacto, entonces X es compacto.

5. **(2½ puntos)** Dado un espacio topológico X definimos el cono sobre X como el espacio cociente que se obtiene de $X \times [0,1]$ al identificar todos los puntos de la forma $(x, 1)$ a un solo punto.

   Prueba que si $X \times [0,1]$ es T_4, entonces el cono sobre X es $T_{3\frac{1}{2}}$. Tu prueba tiene que ser detallada.