Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral- Semestre 2021-2

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Numere las hojas y escriba las respuestas en hojas separadas.
- Responda las preguntas justificando su respuesta.

1. Demuestre que la ecuación $\tan x = -x$ tiene una única raíz en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Justifique su respuesta.

2.
a) Determine la convergencia de la sucesión $x_1 = 1$, $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$ para $n \geq 2$.

b) Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$ cuando $n \to \infty$.

3. Una compañía de tecnología compra un nuevo sistema de computación cuyo valor inicial es V. Con el tiempo, el sistema se deprecia a razón $f(t)$ y acumula costos de mantenimiento a razón $g(t)$, donde t se mide en meses. La compañía quiere determinar el tiempo óptimo para remplazar el sistema
a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t [f(s) + g(s)] ds$$

el costo de la tecnología adquirida despues de un tiempo t, considerando la depreciación y los costos de mantenimiento. Demuestre que los puntos críticos de C son aquellos t en donde se satisface $C(t) = f(t) + g(t)$.

b) Sea

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450} t & 0 < t \leq 30 \\ \\ 0 & t > 30 \end{cases}$$

y $g(t) = \dfrac{V t^2}{12900}$, $t > 0$.

Determine el lapso de tiempo T que tiene que transcurrir para que la depreciación total, la cual esta definida por $D(t) = \int_0^t f(s) ds$ sea igual al valor inicial.

4. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes para formar un cuadrado y un triángulo equilátero.
a) ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada por los dos polígonos sea mínima?
b) ¿Qué puede decir sobre el área total máxima encerrada por las dos figuras?

5. Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular invertido cuya base tiene un radio de 3 m y altura de 4 m. Si se bombea agua a una velocidad de 2 m^3/min, encuentre la velocidad con respecto a la altura a la cual sube el agua cuando esta tiene una profundidad de 3 m (Sug. Use triángulos semejantes).