

# Posgrado en Ciencias Matemáticas

## Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral

### Semestre 2019-I

Escriba los ejercicios en orden de aparición y solo un ejercicio por cada lado de la hoja.

1. (2 puntos)

Sea  $a_n = \frac{2n}{3n+1}$ .

a) Determine si la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente, y si es el caso evalúe su límite.

b) Determine si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.

2. (2 puntos)

a) Si  $f$  es continua y para toda  $x \in \mathbb{R}$  satisface  $f(2x) = f(x)$ , demuestre que  $f$  es constante.

b) Si  $f$  es diferenciable y para toda  $x \in \mathbb{R}$  satisface  $f(2x) = 2f(x)$ , demuestre que existe un real  $a$  tal que  $f(x) = ax$ .

3. (2.5 puntos)

Una escalera de 7 metros de largo está recargada sobre un muro. Si su base es empujada en dirección horizontal hacia el muro a una velocidad de  $1.5m/s$ . ¿A qué velocidad se desplaza verticalmente el extremo opuesto cuando la base se encuentra a 2 m de distancia del muro?

4. (2.5 puntos)

Encuentre el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio  $r$ .

5. (1 punto)

Encuentre una función  $f$  y un número  $a$  tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}.$$