

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral- Semestre 2021-I

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Numere las hojas y escriba las respuestas en hojas separadas.
- Responda las preguntas justificando su respuesta.

1. Suponga que una partícula P se mueve en línea recta con respecto al tiempo. Sus posiciones se monitorean cada unidad de tiempo, siendo $P_n = P(n)$ su posición al tiempo n . Calcule la posición límite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ de la partícula en cada uno de los siguientes incisos.

a) $P_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$.

b) $P_n = n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$, donde a, b son constantes positivas.

2. Un avión de carga sigue una trayectoria con respecto al tiempo igual a la gráfica de la función $g(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$ en el plano (t, g) . Al tiempo $t = 2$ llega a la estratosfera y suelta un satélite artificial, el cual seguirá una trayectoria en línea recta, en la dirección tangente a la trayectoria del avión en ese instante.

- Calcule la posición del avión en el momento de lanzar el satélite.
- Calcule la posición y velocidad del satélite en el momento del lanzamiento, y determine su trayectoria con respecto al tiempo, suponiendo que se desplaza a velocidad constante.
- Calcule su posición al tiempo $t = 4$.
- Ilustre gráficamente las trayectorias del avión y el satélite con respecto al tiempo.

3. Una fábrica produce tazas de aluminio en forma de cilindro circular recto y con volumen $V = 16 \text{ cm}^3$. Encuentre las dimensiones del cilindro con las cuales se ocupa el mínimo material en la fabricación de las tazas.

- Demuestre que un polinomio de tercer grado tiene exactamente un punto de inflexión.
- Demuestre que la coordenada del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$ si $x_i, i = 1, \dots, 3$ son raíces reales de la función.

5. La función integral senoidal se define como $Si(x) = \int_0^x \frac{\text{sent}}{t} dt$ y es importante en Ingeniería Eléctrica. Dado que $\frac{\text{sent}}{t} \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow 0$, el integrando de $Si(x)$ está definido para toda t y es continuo.

- Dibuje la gráfica de Si .
- ¿En que valores de x esta función tiene máximos locales?
- Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.