Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión Álgebra Lineal,
Abril, 2021

ID (e.g. Herrera Valdez)

Instrucciones. Tiene dos horas para trabajar en su examen. Entregue una sección de respuestas limpia y sin borrones o correcciones, y además adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus dos apellidos (e.g. HerreraValdez). Favor de no escribir en la tabla de la derecha. Entregue su examen ***en un solo archivo pdf*** cuyo nombre comience como en sus hojas de examen (e.g. HerreraValdez_algebra.pdf). Los examenes que no cumplan con las instrucciones no serán calificados.

Problema	Max	Puntos
1	20	
2	40	
3	20	
4	30	
5	20	
Total:	130	

Notación y definiciones. $\mathbb{F}$ representa un campo de números, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ representan a los campos real y complejo, respectivamente. U, V, W representan espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. B^n es el *producto cartesiano* de n copias del conjunto B. $\mathbb{F}^{m,n}$ es el conjunto de *matrices* de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{F}$. Si $x \in \mathbb{F}^n$ y $M \in \mathbb{F}^{m,n}$ entonces Mx es una *combinación lineal* de las columnas de M con pesos iguales a las entradas de x. Si U es subespacio de V (dimensión finita), para toda $v \in V$ existen $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tales que $v = u + w$. La proyección ortogonal $P_U \in \mathcal{L}(V, V)$ mapea $v \mapsto u$. $\mathcal{L}(V, W)$ representa los mapeos lineales de V en W. El subespacio nulo de V asociado a $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es $\mathfrak{Nul}(T) = \{v \in V : Tv = 0\}$. Una funcional lineal de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$ es un operador lineal de V en $\mathbb{F}$, es decir, un elemento de $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$. Un operador es $T \in \mathcal{L}(V, V)$ es positivo si para toda $v, w \in V$, $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ y $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ (T es auto-adjunto).

Preguntas

1. (20 puntos) *Sumas y sumas directas.* Considere los tres espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$,

$$S_1 \quad = \quad \left\{(x, x, 0) \in \mathbb{F}^3 : x \in \mathbb{F}\right\}, \quad S_2 = \left\{(0, y, z) \in \mathbb{F}^3 : y, z \in \mathbb{F}\right\}, \text{ y } S_3 = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{F}^3 : z \in \mathbb{F}\right\}.$$

¿Es cierto que $\mathbb{F}^3 = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$? Argumente formalmente su respuesta.

2. $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ representa los *polinomios* de grado no mayor que $n \in \mathbb{Z}^+$ con coeficientes en $\mathbb{F}$.
   (a) (10 puntos) Encuentre una base para $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. *Pista: Tome en cuenta la representación vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n : a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \mapsto (a_0, a_1, ..., a_n)$.*
   (b) (10 puntos) ¿De qué dimensión es $\left\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} p = 0\right\}$? Encuentre una base.
   (c) (10 puntos) Pruebe que ningún conjunto de m polinomios genera $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.
   (d) (10 puntos) Sean $p_0, ..., p_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ y $a \in \mathbb{F}$ tales que $p_j(a) = 0$ para $j = 1, ..., n$. Demuestre que $\{p_0, ..., p_n\}$ no es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

3. *Valores y vectores propios*
   (a) (10 puntos) Suponga que V es n-dimensional. ¿Cuántos valores propios distintos puede tener $T \in \mathcal{L}(V, V)$? Explique su respuesta.
   (b) (10 puntos) Suponga que V tiene dimensión finita. Pruebe que $v_1, ..., v_n \in V$ son linealmente independientes si y solo si existe $T \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que $v_1, ..., v_n$ son vectores propios de T asociados a valores propios distintos de T.

4. *Operadores lineales*
   (a) (10 puntos) Suponga que $\{w_1, ..., w_m\}$ es una base para el rango de $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que existen funcionales $\rho_1, ..., \rho_m \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ tales que $Tv = \rho_1(v)w_1 + ... + \rho_m(v)w_m$.
   (b) (10 puntos) Demuestre que si $\psi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ y $u \in U$ es tal que $\psi(u) \neq 0$, entonces $V = \mathfrak{Nul}(\psi) \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$.
   (c) (10 puntos) Demuestre que para todo par de funcionales lineales $\rho, \varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ con el mismo espacio nulo, existe una constante $c \in \mathbb{F}$ tal que $\rho = c\varphi$.

5. *Productos internos, normas.*
   (a) (10 puntos) Demuestre que la proyección ortogonal P_U es positiva para cualquier subespacio $U \subset V$ de dimensión finita.
   (b) (10 puntos) Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(V, V)$ es auto-adjunto y $b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $b^2 < 4c$, entonces $T^2 + bT + cI$ es un operador positivo. *Pista: Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwartz.*