Temas Selectos en Ecuaciones Diferenciales

MÉTODOS VARIACIONALES EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

(Curso en línea - 9 créditos)

Posgrado en Ciencias Matemáticas - Semestre 2024-2

Mónica Clapp

Horario: Lunes, martes y miércoles de 9:30 a 11:00 horas.

Contacto: Envía un mensaje a monica.clapp@im.unam.mx para recibir el enlace del curso.

Descripción del curso:

Muchos fenómenos de la física, la ingeniería, la biología, la economía, las finanzas y las propias matemáticas se describen mediante ecuaciones diferenciales no lineales. Una clase muy importante de éstas, por la enorme variedad de fenómenos que modelan, son las ecuaciones de Euler-Lagrange, cuyas soluciones satisfacen un criterio de optimización, generalmente dado por una integral que representa alguna energía, una acción, una función de costo, etc. Este tipo de ecuaciones se denominan *problemas variacionales*.

El primer paso para abordar un problema de este tipo consiste en investigar si tiene al menos una solución. Éste no es un asunto sencillo. Ecuaciones que a primera vista parecen semejantes pueden tener comportamientos muy distintos, y pequeñas modificaciones en el término no lineal o en el dominio pueden dar lugar a que el problema variacional no tenga ninguna solución, o bien a que tenga una infinidad de ellas. Interesa pues obtener información acerca de la existencia de soluciones, así como dar, en la medida de lo posible, una descripción cualitativa de éstas. En este curso abordaremos estas cuestiones.

Temario:

1. Preliminares.
    1.1 Espacios de Lebesgue, espacios de Hilbert, convergencia débil.
    1.2 Espacios de Sobolev, teoremas de encaje.
    1.3 Diferenciabilidad en espacios de Hilbert, variedades de Hilbert.
2. Existencia de soluciones.
    2.1 Formulación variacional.
    2.2 La variedad de Nehari.
    2.3 Existencia de soluciones de energía mínima.
    2.4 Obtención de la solución clásica.
3. Multiplicidad de soluciones.
    3.1 El flujo gradiente negativo.
    3.2 El lema de deformación cuantitativo.
    3.3 La condición de Palais-Smale.

    3.4 Invariantes topológicos: categoría de Lusternik-Schnirelmann y género de Krasnoselskii.
    3.5 Obtención de una infinidad de soluciones.
    3.6 El principio variacional de Ekeland.

4. El efecto del dominio. Ondas estacionarias para la ecuación no lineal de Schrödinger.
    4.1 Problemas invariantes bajo traslaciones.
    4.2 El principio de criticalidad simétrica de Palais.
    4.3 Simetrías y compacidad.
    4.4 Infinidad de soluciones radiales.
    4.5 Infinidad de soluciones no radiales.
    4.6 Existencia de un estado fundamental. Compacidad por concentración.
    4.7 Propiedades del estado fundamental: simetría y decaimiento exponencial.

5. El efecto del término no lineal. Problemas de exponente crítico.
    5.1 Problemas invariantes bajo dilataciones.
    5.2 Resultados de no existencia. La identidad de Pohozhaev.
    5.3 Comportamiento de las sucesiones minimizantes.
    5.4 La burbuja estándar.
    5.5 El problema de Brezis-Nirenberg.
    5.6 Representación de sucesiones de Palais-Smale.
    5.7 El problema de Bahri-Coron.

Bibliografía:

1. A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, New York 2007.
2. H. Brezis, *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid 1984.
3. M. Clapp, *Análisis Matemático*, Colección Papirhos, Serie Textos 2, Instituto de Matemáticas de la UNAM, México 2018.
4. M. Clapp, *Métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales*, notas de curso.
5. D.G. Costa, *An invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhäuser, Boston 2007.
6. S. Hildebrandt, A. Tromba, *The parsimonious universe*. Shape and form in the natural world. Copernicus, New York 1996.
7. J. Jost, X. Li-Jost, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, New York 1998.
8. M. Struwe, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996.
9. M. Willem, *Minimax theorems*, PNLDE 24, Birkhäuser 1996.

Evaluación: La evaluación se basará en tareas y exposiciones en clase.