Seminario: Teoría de Birman-Hilden

Dr. Nestor Colin Hernandez

Resumen

El objetivo del seminario es dar continuidad al seminario previo sobre la teoría de Birman-Hilden, estudiando aplicaciones concretas de esta teoría en otros contextos tales como los grupos de trenzas y los espacios modulares de curvas algebraicas. Así como también se exploraran las generalizaciones que surgieron de dicha teoría. En principio no se requiere haber tomado el seminario previo, pero es deseable estar familiarizado con algunos de los temas propuestos para el seminario. En las primeras sesiones se proporcionaran las notas del curso pasado, así como también se dará un breve recordatorio de los puntos principales utilizados en la prueba del Teorema de Birman Hilden.

Introducción

Sea $p : S \to X$ un cubriente posiblemente ramificado entre superficies orientables S y X de tipo finito y posiblemente con frontera. Tomemos los elementos de $\mathrm{Homeo}(S)$ que preservan fibras de $p : S \to X$ y denotemos a este subgrupo como $\mathrm{SHomeo}(S)$. Notemos que cualquier elemento de $\mathrm{SHomeo}(S)$ induce un homeomorfismo de X. Denotemos por $\mathrm{LHomeo}(X)$ a los elementos de $\mathrm{Homeo}(X)$ que pueden levantarse vía la cubierta $p : S \to X$. En este contexto, J. Birman y H. Hilden en [3] estudiaron básicamente la siguiente propiedad:

Para todo $f \in \mathrm{SHomeo}(S)$ tal que f es isotópico a la identidad id_S, entonces existe una isotopía $H : S \times I \to S$ entre f y la identidad tal que $h_t := H(-;t) \in \mathrm{SHomeo}(S)$ para todo $t \in I$.

En mencionado artículo, Birman y Hilden probaron que si la cubierta tiene hojas finitas, es regular, S es una superficie hiperbólica y además el cubriente $p : S \to X$ es no es ramificado o en su caso que el cubriente sea soluble donde además se requiere adicionalmente que X sea hiperbólica, entonces $p : S \to X$ satisface la propiedad anterior. Dicha propiedad le llamaremos *propiedad de Birman-Hilden*. Ahora, consideremos la proyección natural $\mathrm{Homeo}(S) \to \mathrm{Mod}(S), \quad f \mapsto [f]$ y denotemos por $\mathrm{SMod}(S)$ a la imagen del grupo $\mathrm{SHomeo}(S)$ bajo esta proyección. Llamaremos a $\mathrm{SMod}(S)$ *el grupo modular simétrico de S*. De manera análoga, denotamos por $\mathrm{LMod}(X)$ a la imagen de $\mathrm{LHomeo}(X)$ y le llamaremos *el grupo modular levantable de X*. Si el cubriente $p : S \to X$ satisface la propiedad de Birman-Hilden, entonces tenemos una función bien definida

$$\mathrm{SMod}(S) \to \mathrm{LMod}(X).$$

Por lo cual, la teoría de Birman-Hilden nos permite conectar los subgrupos $\mathrm{SMod}(S)$ y $\mathrm{LMod}(X)$ de los grupos modulares $\mathrm{Mod}(S)$ y $\mathrm{Mod}(X)$. Por ejemplo, esto nos permite encontrar presentaciones del grupo $\mathrm{Mod}(S)$ a partir de una de $\mathrm{Mod}(X)$; estudiar los normalizadores $N_{\mathrm{Mod}(S)}(G)$ de los subgrupos finitos $G \leqslant \mathrm{Mod}(S)$ relacionándolos con $\mathrm{LMod}(X)$, entre otras cuestiones.

El objetivo del seminario, es continuar el seminario previo, estudiando las aplicaciones de la teoría de Birman-Hilden en otros contextos. Dichas cuestiones son las siguientes:

1. Generalización de las condiciones sobre el cubriente $p : S \to X$ para tener la propiedad de Birman-Hilden.

2. Generalizaciones al caso de superficies no orientables.

3. Conexión con los grupos de trenzas.
4. Condiciones sobre $p : S \to X$ para que $\mathrm{SMod}(S) = \mathrm{Mod}(S)$ y $\mathrm{LMod}(X) = \mathrm{Mod}(X)$.
5. Grupo de Picard de espacios modulares de curvas algebraicas con simetrías.

Temario

1. **Preliminares**

   Esta parte consiste en recordar brevemente la demostración del Teorema de Birman-Hilden y un parte de grupos modulares de superficies.

2. **Generalizaciones del Teorema de Birman-Hilden.**

   Investigar hasta que punto se pueden extender las condiciones para que la cubierta ramificada $p : S \to X$ satisfaga la propiedad de Birman-Hilden. Por ejemplo, R. Winarski en [11] probó que las cubiertas *completamente ramificadas* satisfacen la propiedad de Birman-Hilden. Buscar y/o desarrollar ejemplos de cubiertas para las cuales no se satisface Birman-Hilden y mencionar que existen cubiertas *completamente ramificadas* que no son consideradas en los teoremas de la sección anterior. Es decir, cubrientes completamente ramificados extienden la clase de cubrientes que son estudiados.

3. **Aplicaciones a representaciones del grupo de trenzas.**

   Describir la relación entre los grupos de trenzas y los grupos modulares del disco con puntos marcados. Una vez establecida dicha relación, explicar como es posible conectar la representación simplectica del grupo modular $\mathrm{Mod}(S_g^1) \to Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ con los grupos de trenzas. Explorar algunos de resultados mencionados en [9, Sección 6] así como posibles aplicaciones de las presentaciones obtenidas.

4. **Relación entre los grupos modulares de superficies orientables y no orientables.**

   Esta pregunta es del tipo Birman-Hilden a la inversa. Probar que a través de la doble cubierta orientable $\pi : S \to N$, podemos inducir una inyección $\mathrm{Mod}(N) \to \mathrm{Mod}(S)$ entre el grupo modular de una superficie no orientable $\mathrm{Mod}(N)$ al grupo modular de su doble cubierta orientable $\mathrm{Mod}(S)$. Se pretende revisar los artículos [4] y [2], presentando las ideas más relevantes de la prueba. Si es posible, complementarlo con el caso de puntos marcados $\mathrm{Mod}(N; k)$ dando la idea principal de como proceder con la inyectividad [7, Teorema 1] y como se conecta con los grupos de trenzas de superficies. Adicionalmente, se puede tener una inyección en el caso de componentes frontera [10, Lema 3].

5. **Birman-Hilden en el contexto de superficies no orientables.**

   Usando la doble cubierta orientable, se puede probar el teorema de Birman-Hilden para superficies no orientables y básicamente está idea fue empleada por Atalan y Medatogullari en [1]. Adicionalmente hacen cierta construcción de blowup para dar ejemplos de cubrientes que no poseen la propiedad de Birman-Hilden.

6. **Sobre el grupo modular simétrico y el levantable.**

   En esta parte se pretende explorar las condiciones que se requieren para que $\mathrm{SMod}(S) = \mathrm{Mod}(S)$ y $\mathrm{LMod}(X) = \mathrm{Mod}(X)$. Con tal motivo se usará el artículo de T. Ghaswala [6], describiendo los resultados obtenidos referentes a estas cuestiones, en el caso que la superficies tenga componentes frontera. Mencionar como es que se aplica la teoría de Birman-Hilden y los resultados previos para obtener ejemplos de encajes no geométricos del grupo de trenzas B_k ([6, Teorema 1.3]). Describir brevemente las preguntas abiertas descritas en [6, Seccion 5.5].

7. **Grupo de Picard del espacio moduli de curvas hiperelípticas.**

   Describir la conexión que se tiene entre el grupo de Picard del espacio moduli $\mathcal{M}_g^H$ de una curva algebraica de género g y la 2 cohomología del grupo modular simétrico $\mathrm{SMod}(S)$ obtenido de la cubierta $p : S \to S/H$. Se propone explicar las ideas principales de [8], así como parte de la teoría de curvas algebraicas que sea necesaria.

Bibliografía

[1] F. Atalan and E. Medetogullari, *The birman–hilden property of covering spaces of nonorientable surfaces*, Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal **72** (2020), no. 3, 307–315.

[2] J. S. Birman and D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 71, Cambridge University Press, 1972, pp. 437–448.

[3] J. S. Birman and H. M. Hilden, *On isotopies of homeomorphisms of riemann surfaces*, Annals of Mathematics **97** (1973), no. 3, 424–439.

[4] Joan S. Birman and Hugh M. Hilden, *Lifting and projecting homeomorphisms*, Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 428–434. MR 321071

[5] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups (pms-49)*, vol. 41, Princeton university press, 2011.

[6] Tyrone Ghaswala and Alan McLeay, *Mapping class groups of covers with boundary and braid group embeddings*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 1, 239–278. MR 4071371

[7] D. L. Gonçalves, J. Guaschi, and M. Maldonado, *Embeddings and the (virtual) cohomological dimension of the braid and mapping class groups of surfaces*, Confluentes Math. **10** (2018), no. 1, 41–61. MR 3869010

[8] Kevin Kordek, *Picard groups of moduli spaces of curves with symmetry*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2020), no. 23, 9293–9335. MR 4182796

[9] Dan Margalit and Rebecca R. Winarski, *Braids groups and mapping class groups: the Birman-Hilden theory*, Bull. Lond. Math. Soc. **53** (2021), no. 3, 643–659. MR 4275077

[10] Bł ażej Szepietowski, *Embedding the braid group in mapping class groups*, Publ. Mat. **54** (2010), no. 2, 359–368. MR 2675928

[11] Rebecca R. Winarski, *Symmetry, isotopy, and irregular covers*, Geom. Dedicata **177** (2015), 213–227. MR 3370031