TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA
MÉTODOS GEOMÉTRICOS Y ANALÍTICOS
EN TEORÍA DE NÚMEROS
(9 CRÉDITOS)

DANIEL LABARDINI FRAGOSO

1. Resumen

El curso tiene por objetivo explorar algunos aspectos y enfoques geométricos y analíticos en las teorías de formas cuadráticas, números algebraicos, aproximaciones Diofantinas, ecuaciones Diofantinas y números trascendentes. **Modalidad: Híbrida.**

2. Prerrequisitos

Se supondrá que el/la Estudiante domina el contenido de los cursos *Álgebra Moderna* y *Análisis Real* del Programa de Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM, y *Variable Compleja I* de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Conocimiento previo de Geometría Hiperbólica y Teoría de Números Algebraicos sería útil, mas no necesario.

3. Evaluación

La forma de evaluación será decidida durante las dos primeras semanas de clase.

4. Temas

1. El diagrama de Farey
   a) Suma ingenua de fracciones ([6, §1.1])
   b) Sucesiones de Farey ([6, §1.2])
2. Fracciones continuadas
   a) Formalismo ([8, §I.1])
   b) Fracciones continuadas finitas ([6, §2.1])
   c) Fracciones continuadas infinitas ([6, §2.2], [8, §I.2])
   d) Las fracciones continuadas de $1+\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y e ([8, §V.1 y §V.2], [18, Capítulo 3])
   e) Ecuaciones Diofantinas lineales ([6, §2.3])
   f) Números equivalentes ([8, §I.3])
   g) Convergentes intermedias ([8, §I.4])
   h) Distribución de las convergentes ([8, §II.1])
   i) Búsqueda de factores no triviales de enteros grandes ([7, §V.3 y §V.4])
   j) Gráficas de serpiente y sus apareamientos perfectos ([3, 4])
3. Simetrías del diagrama de Farey
   a) Transformaciones de Möbius ([6, §3.1])
   b) Traslaciones y reflexiones deslizadas ([6, §3.2])

4. Formas cuadráticas
   a) El topógrafo de Conway de una forma cuadrática ([6, §4.1], [5])
   b) Periodicidad ([6, §4.2])
   c) La ecuación de Pell ([6, §4.3])
5. Clasificación de formas cuadráticas
   a) Los cuatro tipos de formas ([6, §5.1])
   b) Equivalencia de formas ([6, §5.2])
   c) El número de clase ([6, §5.3])
   d) Simetrías de formas ([6, §5.4])
   e) Trazando todas las formas ([6, §5.5])
6. Representación por formas cuadráticas
   a) Tres niveles de complejidad ([6, §6.1])
   b) Representaciones en discriminante fijo ([6, §6.2])
   c) Género y caracteres ([6, §6.3])
   d) Prueba de la ley de reciprocidad cuadrática ([6, §6.4])
7. Grupos de clases de formas cuadráticas
   a) Multiplicación de formas ([6, §7.1])
   b) El grupo de clases de formas de discriminante fijo ([6, §7.2])
   c) Grupos abelianos finitos ([6, §7.3])
   d) Simetría y el grupo de clase ([6, §7.4])
   e) Género y equivalencia racional ([6, §7.5])
8. Campos cuadráticos
   a) Factorización en primos e irreducibles ([6, §8.1] [17, §4.2, §4.3, §4.4 y §4.5])
   b) Factorización única vía el algoritmo de Euclides ([6, §8.2], [17, §4.6 y §4.7])
   c) La correspondencia entre formas e ideales ([6, §8.3])
   d) El grupo de clases de ideales ([6, §8.4])
   e) Factorización única de ideales ([6, §8.5])
   f) Aplicaciones a formas ([6, §8.6])
   g) Aplicaciones en la solución de ecuaciones Diofantinas ([17, §4.8 y §4.9])
9. Aproximaciones Diofantinas
   a) Aproximación de números irracionales por números racionales ([12, Capítulo 1], [18, Capítulo 3])
   b) Aproximación de números complejos ([12, Capítulo 4])
   c) Los teoremas de Hurwitz y Markov vía Geometría Hiperbólica ([16])
   d) El producto de formas lineales ([12, Capítulo 2])
   e) Los múltiplos de un número irracional ([12, Capítulo 3])
   f) El producto de formas lineales complejas ([12, Capítulo 5])
   g) El teorema de Liouville ([10, Capítulo 1])
10. Números trascendentes
   a) El teorema de Hermite (e es trascendente, [10, Capítulo 2])
   b) El teorema de Lindemann (π es trascendente, [10, Capítulo 3])
   c) El teorema de Lindemann–Weierstrass (cómo generar números trascendentes, [10, Capítulo 4])
   d) El principio del módulo máximo y el teorema fundamental del álgebra ([10, Capítulo 5])

11. Series de Dirichlet y productos de Euler
    a) El semiplano de convergencia absoluta de una serie de Dirichlet ([2, §11.2])
    b) La función definida por una serie de Dirichlet ([2, §11.3])
    c) Producto de series de Dirichlet y convolución de Dirichlet ([2, §11.4])
    d) Productos de Euler ([2, §11.5])
    e) El semiplano de convergencia de una serie de Dirichlet ([2, §11.6])
    f) Propiedades analíticas de las series de Dirichlet ([2, §11.7])

Referencias

[1] Titu Andreescu, Dorin Andrica. *Quadratic Diophantine equations*. Developments in Mathematics, 40. Springer, 2015.
[2] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1976.
[3] İlke Çanakçı, Ralf Schiffler. *Cluster algebras and continued fractions*. Compositio Mathematica 154 (2018), no. 3, 565–593. arXiv:1608.06568
[4] İlke Çanakçı, Ralf Schiffler. *Snake graphs and continued fractions*. European Journal of Combinatorics 86 (2020), 103081, 19 pp. arXiv:1711.02461
[5] John H. Conway. *The sensual (quadratic) form*. Carus Mathematical Monographs, 26. Mathematical Association of America, 1997.
[6] Allen Hatcher. *Topology of numbers*. American Mathematical Society, 2022.
[7] Neal Koblitz. *A Course in Number Theory and Cryptography*, 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics 114, Springer-Verlag, 1994.
[8] Serge Lang. *Introduction to Diophantine approximations*, 2nd edition. Springer-Verlag, 1995.
[9] William J. LeVeque. *Elementary Theory of Numbers*. Dover Publications, 1990.
[10] M. Ram Murty, Purusottam Rath. *Transcendental numbers*. Springer, 2014
[11] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Ed. Limusa, 1985.
[12] Ivan Niven. *Diophantine approximations*. Dover publications, 2008.
[13] Takashi Ono. *An Introduction to Algebraic Number Theory*. University series in Mathematics, Plenum Press, 1990.
[14] Harry Pollard, Harold G. Diamond. *The Theory of Algebraic Numbers*, tercera edición. Dover Publications, 1998.
[15] Pierre Samuel. *Algebraic Theory of Numbers*. Hermann, 1971.
[16] Boris Springborn. *The hyperbolic geometry of Markov's theorem on Diophantine approximation and quadratic forms*. L'Enseignement Mathématique (2) 63 (2017), 333–373
[17] Ian Stewart, David Tall. *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*, 3rd edition. A K Peters, 2002.
[18] Nicolai N. Vorobiev. *Fibonnacci Numbers*. Birkhäuser-Verlag, 2002.

Daniel Labardini Fragoso
Instituto de Matemáticas, CU, UNAM, Mexico
https://www.matem.unam.mx/~labardini
Email address: labardini@im.unam.mx