

Dinámica Discreta e hiperespacios

Área: Topología.

Apartir de un espacio métrico compacto X y de una función continua f de X en sí mismo, se obtiene un sistema dinámico discreto (sdd), que denotamos con (X,f) . Cada colección no vacía formada por elementos del conjunto potencia de X es un hiperespacio. Sea 2^X el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados no vacíos contenidos en X . La función f define de manera natural una función inducida de 2^X en sí mismo, que llamaremos F .

La idea central de este curso es estudiar las relaciones existentes entre las propiedades dinámicas del sistema (X,f) y las del sistema $(2^X,F)$. En particular nos interesan aquellas propiedades que nos permiten concluir que el sdd correspondiente es caótico o tiene una dinámica complicada. Si f es un homeomorfismo, entonces las propiedades del sdd correspondiente están fuertemente relacionadas con la topología de X .

En el curso se verán algunos temas clásicos, como una introducción a la entropía topológica. Se estudiarán varias propiedades de las distintas formas de recurrencia. Se repasarán varios de los resultados conocidos para funciones definidas en el intervalo, y se discutirá sobre su posible generalización a otros espacios. Una parte importante es el estudio de algunos aspectos de la dinámica simbólica (función shift y subshifts tipo “spacing”).

Temario.

1. Tipos de recurrencia. Puntos periódicos, casi-periódicos, recurrentes, no errantes, recurrentes por cadenas.
2. Hiperespacios. El espacio 2^X . La colección de los subconjuntos cerrados no vacíos y conexos de X . Métrica de Hausdorff. Topología de Vietoris. Productos simétricos. Funciones inducidas.
3. Propiedades de mezclado. Funciones transitivas, débilmente mezclantes, mezclantes, exactas, totalmente transitivas, transitivas por cadenas.
4. Dinámica en el omega conjunto límite, $w(x,f)$.
5. Propiedades de sombreado. Órbitas y pseudo-órbitas.
6. Entropía topológica. Definición de Adler et al, y la definición de R. Bowen. Propiedades básicas y ejemplos. Discusión sobre la equivalencia de las definiciones.
7. Estudio de los resultados conocidos cuando X es el intervalo unitario. Teorema de Sharkovskii y entropía.
8. El hiperespacio $W(f)$, contenido en 2^X , formado por la colección de todos los conjuntos $w(x,f)$. Propiedades topológicas iniciales de $W(f)$.

9. Dinámica simbólica. Propiedades de la función shift. Subshifts tipo “spacing”. Otras funciones con dinámica interesante definidas en el conjunto de Cantor.

10. Ejemplos de sistemas dinámicos discretos definidos en árboles y en dendritas.

Bibliografía.

L. S. Block y W. A. Coppel, “Dynamics in One Dimension”. Lecture Notes in Mathematics 1513, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

M. Brin y G. Stuck, “Introduction to Dynamical Systems”, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2002.

R. L. Devaney, “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems”, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

D. Kwietniak y P. Oprocha, “Topological Entropy and Chaos for Induced Hyperspace Maps”, Chaos, Solitons and Fractals, 33, (2007), 76-86.

H. Méndez, "Dinámica discreta e hiperespacios". Notas para un curso avanzado.

Disponible en el enlace:

https://drive.google.com/drive/folders/1XLpZLL4IUPf9_YqE4FJkYVNd5zQQQ9wO?usp=share_link

S. B. Nadler, “Continuum Theory, an Introduction”, Marcell Dekker, New York, 1992.

P. Walters, “An Introduction to Ergodic Theory”. Graduate Texts in Mathematics 79, Springer Verlag, New York, 1982.

Héctor Méndez Lango,

Cubículo 217 del Departamento de Matemáticas,

Facultad de Ciencias, UNAM.

Ciudad Universitaria, jueves 19 de octubre de 2023.