

TEMAS SELECTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
ESPACIOS DE SOBOLEV Y ECUACIONES
DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO ELÍPTICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
(9 CRÉDITOS)
SEMESTRE 2024-2

RAMÓN G. PLAZA

INFORMACIÓN GENERAL

Contacto.

Ramón G. Plaza
Oficina 221 (segundo piso), IIMAS (edificio principal).
E-mail: plaza@mym.iimas.unam.mx, ramongplaza@gmail.com
Web: <https://mym.iimas.unam.mx/ramon/>

Horario.

- Las clases se llevarán a cabo los **lunes y miércoles, de 16:00 a 18:15 hrs.**
- El salón será asignado por el Posgrado en Ciencias Matemáticas (Edificio Anexo o edificio C, IIMAS).
- La primera clase tendrá lugar el próximo **lunes 27 de enero, a las 16:00 hrs.**

Horas de oficina.

- En la primera reunión (lunes 27 de enero) se definirá una hora fija a la semana (horas de oficina) para atender a los alumnos con dudas y aclaraciones sobre el contenido del curso.

Página del curso.

- La página del curso contendrá todos los anuncios relacionados con el mismo, así como tareas, calendario, temario y demás material auxiliar.
- La liga permanente de la página del curso es:
<https://mym.iimas.unam.mx/ramon/SelectosEDPs-2024-2.html>

Evaluación.

Se evaluará al alumno con 3 tareas. La primera tarea será sobre las secciones 1 y 2 del temario, mientras que la segunda y la tercera serán sobre las secciones 3 y 4, respectivamente.

Calendario.

- Periodo de clases: 29 de enero al 24 de mayo 2024.
- Periodo de exámenes: 27 de mayo al 7 de junio, 2024.
- Días inhábiles: 5 de febrero, 18 de marzo, 25 al 29 de marzo (vacaciones de semana santa), 1, 10 y 15 de mayo, 2024.

Objetivo. Introducir al estudiante a la teoría lineal de ecuaciones diferenciales parciales elípticas basada en espacios de Sobolev. Se discutirán: espacios de Hilbert y de Banach, teoría de distribuciones, espacios de Sobolev y ecuaciones diferenciales parciales lineales de tipo elíptico.

Pre-requisitos. Un curso de posgrado de Análisis Real es indispensable. Los cursos básicos de Ecuaciones Diferenciales Parciales y de Análisis Funcional son deseables pero no estrictamente necesarios.

TEMARIO

1. Preliminares: Espacios de Hilbert y de Banach.
 - 1.1 Propiedades básicas. El teorema de proyección, teorema de Riesz.
 - 1.2 Operadores lineales: breve introducción a teoría espectral.
 - 1.3 Espacio dual, alternativa de Fredholm.
 - 1.4 Lema de Lax-Milgram y teoremas relacionados.
 - 1.5 Métodos de aproximación.
2. Teoría de distribuciones.
 - 2.1 Funciones de prueba y espacio de distribuciones. Convergencia.
 - 2.2 Cálculo de distribuciones: multiplicación, composición, convolución.
 - 2.3 Transformadas de Fourier y de Laplace.
 - 2.4 Distribuciones temperadas.
3. Espacios de Sobolev
 - 3.1 Espacios de Sobolev en \mathbb{R}^n . Definición y propiedades básicas.
 - 3.2 El teorema de traza. Completitud.
 - 3.3 Espacios de Sobolev en dominios arbitrarios.
 - 3.4 Aproximaciones, extensiones, trazas.
 - 3.5 Desigualdades de Sobolev y teoremas de encaje.
 - 3.6 Compacidad: el teorema de Rellich-Kondrachov.
 - 3.7 Desigualdades tipo Poincaré.
 - 3.8 El espacio dual.
4. Formulación variacional de problemas elípticos.
 - 4.1 Operadores elípticos.
 - 4.2 Formulación variacional: existencia y unicidad de soluciones débiles.
 - 4.3 Teoría de regularidad para operadores elípticos de segundo orden.
 - 4.4 Principio del máximo.
 - 4.5 Teoría espectral.
 - 4.6 Introducción al método de elemento finito.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica. Los textos centrales para este curso son el libro de Salsa [19] y la segunda parte del libro de Evans [8].

Bibliografía complementaria. La primera sección tiene como objetivo recordar material básico y estándar de Análisis Funcional en espacios de Hilbert y de Banach, con especial énfasis en el lema de Lax-Milgram y sus variaciones (lema de Stampacchia, lema de Babuska-Brezzi) y los métodos variacionales de aproximación (Galerkin, Ritz, Courant). El estudiante puede consultar cualquier libro de Análisis Funcional (recomiendo, sin embargo, libros con orientación a EDPs tales como Bressan [4], Brezis [5], Attouch *et al.* [3] y Rektorys [17], por citar algunos). Una

introducción a la teoría espectral de operadores en espacios de Banach y de Hilbert se puede encontrar en los textos de Kato [13], Akhiezer y Glazman [2] y el cuarto volumen de Reed y Simon [16]. La sección dedicada a teoría de distribuciones se basará en los contenidos de los libros de Salsa [19] y Eskin [7]. Para profundizar en el tema recomiendo los clásicos textos de Schwartz [20] y Zemanian [24], así como el libro de Strichartz [22].

La parte central del curso está dedicada a desarrollar la teoría de espacios de Sobolev. Los temas se basarán fundamentalmente en la segunda parte de los libros de Salsa [19] y Evans [8]. Sin embargo, no todo el material que cubriremos está contenido en dichos textos. Invito al estudiante a que complementa con lecturas de otros textos como los libros de Eskin [7], Leoni [15], Folland [9], Kesavan [14] y Brézis [5]. Es necesario también mencionar la referencia canónica sobre el tema: el libro de Adams [1].

Para profundizar en el estudio de ecuaciones elípticas el clásico texto de Gilbarg y Trudinger [10] es una excelente opción. La segunda edición del texto de Renardy y Rogers [18] es una buena referencia para problemas elípticos que contiene, además, un capítulo muy bien escrito sobre problemas no lineales para aquél que desee iniciarse en ese tema. Un libro clásico es, por supuesto, el segundo tomo de Courant y Hilbert [6]. El libro de Showalter [21] es muy didáctico y recomendable (además de gratuito). También me basaré en gran medida en el texto de Attouch *et al.* [3]. La referencia obligada para el método de elemento finito es el libro de C. Johnson [11]. Finalmente, como complemento para todo el material de este curso y otros temas, véanse los textos de Jost [12] y Taylor [23].

REFERENCIAS

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, 1975.
- [2] N. I. AKHIEZER AND I. M. GLAZMAN, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.
- [3] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO, AND G. MICHAÏLLE, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization*, vol. 17 of MOS-SIAM Series on Optimization, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Optimization Society, Philadelphia, PA, second ed., 2014.
- [4] A. BRESSAN, *Lecture Notes on Functional Analysis*, vol. 143 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [5] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [6] R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [7] G. ESKIN, *Lectures on linear partial differential equations*, vol. 123 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [8] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [9] G. B. FOLLAND, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, second ed., 1995.
- [10] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [11] C. JOHNSON, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [12] J. JOST, *Partial differential equations*, vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, second ed., 2007.

- [13] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [14] S. KESAVAN, *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [15] G. LEONI, *A first course in Sobolev spaces*, vol. 181 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2017.
- [16] M. REED AND B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press – Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York-London, 1978.
- [17] K. REKTORYS, *Variational methods in mathematics, science and engineering*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, second ed., 1980. Translated from the Czech by Michael Basch.
- [18] M. RENARDY AND R. C. ROGERS, *An introduction to partial differential equations*, vol. 13 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 2004.
- [19] S. SALSA, *Partial differential equations in action. From modelling to theory*, vol. 86 of Unitext, Springer, Cham, second ed., 2015. La Matematica per il 3+2.
- [20] L. SCHWARTZ, *Mathematics for the physical sciences*, Hermann, Paris, 1966.
- [21] R. E. SHOWALTER, *Hilbert space methods for partial differential equations*, Electronic Monographs in Differential Equations, San Marcos, TX, 1994. Electronic reprint of the 1977 original; available at <http://ejde.math.swt.edu/mtoc.html>.
- [22] R. S. STRICHARTZ, *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [23] M. E. TAYLOR, *Partial differential equations. Basic theory*, vol. 23 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [24] A. H. ZEMANIAN, *Distribution theory and transform analysis*, Dover Publications, Inc., New York, second ed., 1987. An introduction to generalized functions, with applications.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, CIRCUITO ESCOLAR S/N, C.P. 04510 CD. DE MÉXICO (MÉXICO)

Email address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`