

Curso Avanzado: Introducción a la variedad de representaciones

Dr. Faustino Agustín Romano Velázquez

October 20, 2023

1 Resumen

Dada una variedad M y un grupo algebraico complejo reductivo G (por ejemplo, $G = GL(n, \mathbb{C})$ ó $SL(n, \mathbb{C})$) la *variedad de G -representaciones de M* es la colección de todas las representaciones de $\pi_1(M)$ en G . Esta variedad tiene (de manera natural) una estructura de una variedad algebraica afín. La variedad de representaciones y la variedad de caracteres (la variedad de representaciones módulo conjugación) son objetos muy importantes, por ejemplo; dada M una tres-variedad (por ejemplo, el complemento de un nudo en S^3) y tomando $G = SL(2, \mathbb{C})$ por el trabajo de Thurston, Culler y Shalen sabemos que estas variedades dan información de las propiedades geométricas y topológicas de M .

El objetivo del curso es brindar los conceptos necesarios de geometría algebraica para estudiar la variedad de representaciones. Si el tiempo lo permite veremos algunos ejemplos concretos. Algunas referencias son [1, 2, 3, 4, 5].

2 Temario

1. Estructuras geométricas.
 - (a) Variedades suaves.
 - (b) Geometría hiperbólica y estructuras hiperbólicas.
 - (c) Geometría Riemanniana, haces vectoriales, conexiones y curvatura.
2. Aspectos de topología algebraica.
 - (a) Grupo fundamental.
 - (b) Homología y cohomología.
3. Introducción a la teoría algebraica.
 - (a) Conjuntos algebraicos afines.
 - (b) Variedades suaves y singulares.

- (c) La variedad de representaciones.
 - (d) Introducción al espacio moduli.
4. Ejemplos.
- (a) La variedad de representaciones de superficies compactas.
 - (b) La variedad de representaciones de complementos de nudos.

References

- [1] Michael Heusener. Some recent results about the $SL_n(C)$ -representation spaces of knot groups. In *Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Année 2014–2015*, pages 137–161. St. Martin d'Hères: Université de Grenoble I, Institut Fourier, 2015.
- [2] Michael Heusener, Vicente Muñoz, and Joan Porti. The $SL(3, C)$ -character variety of the figure eight knot. *Ill. J. Math.*, 60(1):55–98, 2016.
- [3] François Labourie. *Lectures on representations of surface groups*. Zur. Lect. Adv. Math. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2013.
- [4] W. Goldman S.B. Bradlow, O. García-Prada and A. Wienhard. Representations of surface groups: background material for aim workshop. http://www.math.illinois.edu/~dowdall/talk_resources--GEAR2012/Bradlow/some_resources/III.2-aim_intro.pdf.
- [5] R. P. Thomas. Notes on GIT and symplectic reduction for bundles and varieties. In *Essays in geometry in memory of S. S. Chern*, pages 221–273. Somerville, MA: International Press, 2006.