Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2024-I.
19 de enero de 2024.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sean $f : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupos y N un subgrupo normal de G tal que $N \subseteq Kerf$. Demuestra que existe un único morfismo de grupos $\bar{f} : {}^{G}/_{N} \longrightarrow H$ tal que $f = \bar{f} \circ \rho$ y $Imf = Im\bar{f}$, donde $\rho : G \longrightarrow {}^{G}/_{N}$ es la proyección canónica. Calcula $Ker\bar{f}$ y demuestra con ello que, $\bar{f}$ es un monomorfismo de grupos si y solo si $N = Kerf$. Infiere con lo anterior el primer teorema de isomorfismo.

2. Sea G un grupo finito que tiene un subgrupo H de índice p, donde p es el menor primo que divide a $|G|$. Demuestra que H es un subgrupo normal de G.

3. (a) Sean G un grupo finito y H un p-subgrupo de G. Demuestra que
$$[G : H] \equiv [N_G(H) : H] \, (\text{mod } p).$$
Sugerencia: Define una acción de H sobre el conjunto de las clases laterales izquierdas de H y analiza los puntos fijos de esta acción.
(b) Sea G un p-grupo finito no trivial. Demuestra que cualquier subgrupo propio de G está contenido propiamente en su normalizador.

4. Sea G un grupo no abeliano de orden p^3 con p primo. Demuestra que $|Z(G)| = p$, ${}^{G}/_{Z(G)} \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y que $Z(G) = G'$ donde G' es el subgrupo conmutador de G.

5. Recuerda que se define inductivamente la serie derivada de un grupo G como:
$$G^{(0)} := G, \; G^{(1)} := [G, G] \; y \; G^{(i+1)} := \left[G^{(i)}, G^{(i)}\right].$$

Demuestra que G es soluble si y sólo si existe un natural n tal que $G^{(n)} = \{1\}$.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Considera $\mathbb{Z}\left(\sqrt{5}\right) := \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ y una "norma" N definida como $N(x) := |a^2 - 5b^2|$ si $x = a + b\sqrt{5}$. Demuestra que:
   (a) Si x no es cero y no es unidad, entonces $N(x) \geq 4$.
   (b) x es irreducible si $4 \leq N(x) < 16$.
   (c) 4 se factoriza como producto de irreducibles, pero no de manera única.
   Concluye que $\mathbb{Z}\left(\sqrt{5}\right)$ no es un D.F.U.

2. Sean k un campo, $K := k(x)$ el campo de cocientes de $k[x]$ y $u \in K$. Demuestra que $K = k(u)$ si y sólo si $u = \frac{ax+b}{cx+d}$ para algunos $a, b, c, d \in k$ tales que $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

3. Sean $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ y E su campo de descomposición. Demuestra que $Gal\left(E \mid_{\mathbb{Q}}\right) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4. Sea $F \mid_E$ una extensión de campos tal que $[F : E] < \infty$. Supón que para cualesquiera dos subcampos F_1 y F_2 de F que contienen a E, se tiene que $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$. Demuestra que existe un elemento $\alpha \in F$ tal que $F = E(\alpha)$.