

**Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2024-I.
19 de enero de 2024.**

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Cada uno de los seis ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos considerados son conmutativos con unidad. Si A es un anillo, denotaremos por A^* al conjunto de las unidades, es decir, los elementos que tienen inverso multiplicativo.

1. Sean k un campo y X una indeterminada. Calcula la dimensión de Krull de $k[X, X^{-1}]$.
2. Sea A un anillo y sean M, N dos A -módulos y $P \subset A$ un ideal primo. Demuestra que

$$M_P \otimes_{A_P} N_P \cong (M \otimes_A N)_P.$$

3. Sea M un A -módulo finitamente generado. Sea I un ideal de A . Demuestra que $Supp_A(M/IM) = Supp_A M \cap V(I)$.
4. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos y sea $\varphi : Spec B \rightarrow Spec A$ el mapeo inducido sobre los espectros primos. Demuestra que si $J \subset B$ es un ideal entonces

$$\overline{\varphi(V(J))} = V(\varphi(J))$$

donde la cerradura es en la topología de Zariski.

5. Sea M un A -módulo Noetheriano y sea $I \subset A$ el anulador de M . Demuestra que A/I es un anillo Noetheriano.
6. Sean $A \subset B$ dos anillos tales que B es entero sobre A . Demuestra que $A \cap B^* = A^*$.