Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico

Posgrado en Ciencias Matemáticas UNAM

Semestre: 2024-1 **Fecha:** Enero 2024

Instrucciones

- **Calificación**: sobre 30 puntos. Requiere al menos 18 puntos para aprobar.
- **Duración**: 4 horas.
- Enumere los ejercicios e incisos, indicando dónde termina cada uno.
- Escriba su nombre a todas las hojas y enumérelas.
- Resuelva los ejercicios de forma clara, argumente sus respuestas y explique su procedimiento.

Ejercicios

1 Considere un sistema decimal $\mathcal{F}$ de precisión seis con exponente entre -7 y 7.

a) (1 punto) Explique cómo aproximar un número real $x \in [10^6, 10^7)$ por un número flotante en $\mathcal{F}$ por redondeo al más cercano.

b) (1 punto) Halle la unidad de redondeo del sistema $\mathcal{F}$ usando redondeo por corte, y luego por redondeo al más cercano.

2 (2 puntos) Describa un algoritmo para convertir un número natural a base binaria.

3 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Suponga que f tiene un cero $x_* \in I$. Sea $x_0 \in I$. Considere la sucesión:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

a) (1 punto) ¿Qué condiciones deben satisfacer f y x_0 para que la sucesión $\{x_n\}$ converja a x_* con orden lineal?

b) (1 punto) ¿Qué quiere decir que una sucesión tenga convergencia cuadrática?

c) (1 punto) ¿Qué condiciones deben satisfacer f y x_0 para que la sucesión $\{x_n\}$ tenga convergencia cuadrática?

$\boxed{4}$ *Factorización de Cholesky*

a) (1 punto) Indique qué propiedades debe cumplir una matriz real para tener factorización de Cholesky.

b) (2 puntos) Describa un algoritmo para obtener la factorización de Cholesky de una matriz 4×4 que cumpla las condiciones del inciso anterior.

c) (2 puntos) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Halle para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene factorización de Cholesky.

$\boxed{5}$ *Interpolación por polinomios y splines*

a) (1 punto) Exprese el polinomio cúbico que pasa por $(i, y_i), i = 1, 2, 3, 4$ en la forma de Lagrange.

b) (1 punto) Exprese el polinomio del inciso anterior usando diferencias divididas.

c) (1 punto) Explique qué es un spline cúbico para una partición:

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1.$$

d) (1 punto) Explique qué es un interpolante cúbico de Hermite para una función diferenciable $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con respecto a la partición:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1.$$

$\boxed{6}$ *Regla de cuadratura gaussiana.*

a) (3 puntos) Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Explique cómo obtener una regla de cuadratura gaussiana de tres nodos para la integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, d(x).$$

Determine los pesos, los nodos y el grado máximo del polinomio para el cual esta regla de cuadratura es exacta.

b) (1 punto) Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Explique cómo usar la cuadratura gaussiana del inciso anterior para aproximar la integral

$$\int_{0}^{1} g(x)\, d(x).$$

$\boxed{7}$ Sea A una matriz real de tamaño $m \times 2$ tal que $\text{rango}(A) = 2 < m$, y sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) (1 punto) Dé una interpretación geométrica del problema de mínimos cuadrados asociado al sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) (2 puntos) Explique cómo obtener las ecuaciones normales del problema lineal de mínimos cuadrados.

c) (2 puntos) Explique cómo usar una factorización QR de A para obtener la solución de mínimos cuadrados.

d) (3 puntos) Sea $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^m$, sea $\boldsymbol{x}$ la solución de las ecuaciones normales:

$$A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$$

y sea $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ a la solución del sistema perturbado:

$$A^t A\widetilde{\boldsymbol{x}} = A^t(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\epsilon}).$$

Denote por $\text{cond}_1(A^tA)$ al número de condición de A^tA en la norma 1. Pruebe que el error relativo de la solución satisface la siguiente cota:

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \leq \text{cond}_1(A^tA)\frac{(m+1)\|\boldsymbol{\epsilon}\|_1}{2\|\boldsymbol{b}\|_1}$$

e) (2 puntos) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & m \end{pmatrix},$$

pruebe que

$$\text{cond}_1(A^tA) = \frac{4}{3}\frac{(m+1)(m+2)^2}{m-1}.$$

Sugerencia: use $1^2 + 2^2 \ldots + m^2 = m(m+1)(2m+1)/6$.