Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General
Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2024-1

1 Instrucciones

Se tendrá 3 horas para entregar su examen a partir de la hora de inicio. Entregue en hojas por separado sus respuestas indicando los pasos para llegar a la respuesta final. Se tiene que escribir en limpio y claro todos los pasos de su razonamiento matemático. En la esquina superior derecha de cada página, escriba su nombre y enumere las páginas. Los exámenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles no serán calificados.

2 Problemas

1. (20 puntos) Enuncie el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial y posteriorment utilízelo para demostrar que los siguientes problemas tienen solución única. Adicionalmente, para cada uno de los problemas encuentra su solución única con métodos analíticos:

   (a) $y' = y\cos(t),\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1.$

   (b) $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2e^t,\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 0.$

2. (20 puntos) Enunciar la definición de error de truncamiento (consistencia) de un método numérico. Demostrar que el método del punto medio definido como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= y_0 \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + h\left(f\left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{h}{2}f(t_i, \hat{y}_i)\right)\right) \quad \text{para } i \in \{0, \dots, N\}, \end{aligned}$$

   que se emplea para aproximar la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \quad t \in (a, b) \\ y(a) &= y_0. \end{aligned}$$

   tiene un error de truncamiento de orden $r = 2$ y donde N es el número de sub-intervalos que divide a $[a, b]$, $t_i := a + ih$ y $h := (b - a)/N$. (**Sugerencia**: utilizar el hecho de que f satisface la condición de Lipschitz en la variable y, el teorema de Taylor varias veces, y la desigualdad $x \le |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$).

3. (10 puntos) Utiliza el teorema de Taylor con residuo para obtener la siguiente approximación de tercer orden para una función suficientemente derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$y(x + 3h) = 3y(x + 2h) - 3y(x + h) + y(x) + Ch^3,$$

donde C es una constante.

4. (30 puntos) Sea la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b), \tag{1}$$
$$y(a) = y_0. \tag{2}$$

Supongasé lo siguiente:

(a) La función $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante Lipschitz L.

(b) $\left|\frac{d^2y}{dt^2}(t)\right| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$.

Sea $\hat{y}_i$ la aproximación de la solución $y(t_i)$ utilizando el método de explícito de Euer:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + hf(t_i, \hat{y}_i) \qquad \text{para } i \in \{0, .., N\},$$

donde N es el número de sub-intervalos que divide a $[a, b]$, $t_i := a + ih$, y $h := (b - a)/N$. Entonces demostrar que

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| \leq Ch \qquad \text{para } i \in \{0, .., N\}, \tag{3}$$

donde C es una constante. Supóngase adicionalmente que $h < 1$. **Sugerencia**: Utilizar el siguiente Lemma: Sean t, s números reales positivos y sea $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ una sucesión que satisface

$$a_0 \geq -\frac{t}{s}, \qquad \text{y} \qquad a_{i+1} \leq (1 + s)a_i + t \quad \text{para } i \in \{0, .., k - 1\},$$

entonces,

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

5. (20 puntos) Problemas rígidos:

(a) Deduzca el método BDF (Backward Differentiation Formula) de orden 2:

$$\hat{y}_{i+2} - \frac{4}{3}\hat{y}_{i+1} + \frac{1}{3}\hat{y}_i = \frac{2}{3}hf(t_{i+2}, \hat{y}_{i+2}).$$

(b) Demostrar que la región de estabilidad absoluta de este método contiene al eje real negativo:

$$-\infty < \lambda h < 0.$$